Stochastická dominance a optimalita portfolií

Martin Dungl

Dopravní fakulta ČVUT

2010

Obsah

Obsah

Obsah

Obsah

Obsah

Množiny užitkových funkcí

- Koncept stochastické dominance pracuje s *užitkovými funkcemi* jednotlivých investorů.
- Množina všech přípustných užitkových funkcí:

$$\mathbb{U} = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(x) \text{ je neklesající na } \mathbb{R}\}.$$

- Budeme se zabývat těmito podmnožinami $\mathbb{U}$:

$$\begin{aligned} U_N &= \{u \in \mathbb{U} \cap \mathcal{C}^N : (-1)^k u^{(k)}(x) \leq 0, x \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, N\} \\ & \quad N \in \mathbb{N} \\ U_\infty &= \bigcap_{N=1}^{\infty} U_N \\ U_E^* &= \{u \in \mathbb{U} : u(x) = ae^{kx} + b, a < 0, k < 0, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Množiny užitkových funkcí

- Koncept stochastické dominance pracuje s *užitkovými funkcemi* jednotlivých investorů.
- Množina všech přípustných užitkových funkcí:

$$\mathbb{U} = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(x) \text{ je neklesající na } \mathbb{R}\}.$$

- Budeme se zabývat těmito podmnožinami $\mathbb{U}$:

$$\begin{aligned} U_N &= \{u \in \mathbb{U} \cap \mathcal{C}^N : (-1)^k u^{(k)}(x) \leq 0, x \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, N\} \\ & \quad N \in \mathbb{N} \\ U_\infty &= \bigcap_{N=1}^{\infty} U_N \\ U_E^* &= \{u \in \mathbb{U} : u(x) = ae^{kx} + b, a < 0, k < 0, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Množiny užitkových funkcí

- Koncept stochastické dominance pracuje s *užitkovými funkcemi* jednotlivých investorů.
- Množina všech přípustných užitkových funkcí:

$$\mathbb{U} = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(x) \text{ je neklesající na } \mathbb{R}\}.$$

- Budeme se zabývat těmito podmnožinami $\mathbb{U}$:

$$\begin{aligned} U_N &= \{u \in \mathbb{U} \cap \mathcal{C}^N : (-1)^k u^{(k)}(x) \leq 0, x \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, N\} \\ & \quad N \in \mathbb{N} \\ U_\infty &= \bigcap_{N=1}^{\infty} U_N \\ U_E^* &= \{u \in \mathbb{U} : u(x) = ae^{kx} + b, a < 0, k < 0, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Předpoklady

S čím dále pracujeme

- Možné finanční výstupy investičních příležitostí (aktiv) jsou reprezentovány náhodnými veličinami. Aktiva tak lze s náhodnými veličinami ztotožnit. Množinu všech přípustných aktiv značíme $\mathbb{X}$.
- Investoři maximalizují svůj užitek.

Předpoklady

S čím dále pracujeme

- Možné finanční výstupy investičních příležitostí (aktiv) jsou reprezentovány náhodnými veličinami. Aktiva tak lze s náhodnými veličinami ztotožnit. Množinu všech přípustných aktiv značíme $\mathbb{X}$.
- Investoři maximalizují svůj užitek.

Stochastická dominance

- **Definice:** Buď $U \subset \mathbb{U}$. Řekneme, že náhodná veličina X *(stochasticky) dominuje* náhodnou veličinu Y vzhledem k množině U, jestliže

$$\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y) \qquad \forall u \in U, \text{ je-li nerovnost definována.}$$

  Zapisujeme $X \succeq_U Y$. Množinu U nazýváme *generátorem stochastické dominance* $\succeq_U$.

- Platí-li navíc pro nějakou funkci $u_0 \in U$ ostrá nerovnost, řekneme, že náhodná veličina X *striktně (stochasticky) dominuje* náhodnou veličinu Y vzhledem k množině U. Značíme $X \succ_U Y$.

Stochastická dominance

- **Definice:** Buď $U \subset \mathbb{U}$. Řekneme, že náhodná veličina X *(stochasticky) dominuje* náhodnou veličinu Y vzhledem k množině U, jestliže

  $$\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y) \qquad \forall u \in U, \text{ je-li nerovnost definována.}$$

  Zapisujeme $X \succeq_U Y$. Množinu U nazýváme *generátorem stochastické dominance* $\succeq_U$.
- Platí-li navíc pro nějakou funkci $u_0 \in U$ ostrá nerovnost, řekneme, že náhodná veličina X *striktně (stochasticky) dominuje* náhodnou veličinu Y vzhledem k množině U. Značíme $X \succ_U Y$.

Obsah

Několik pojmů
..aneb proč se v práci slovo *eficientní* příliš nevyskytuje

- Neexistuje jednotná definice eficientního aktiva.
- Budeme pracovat se třemi specifikacemi aktiv, která někteří označují jako eficienci:
  - Přijatelnost
  - Striktní přijatelnost
  - Optimalita

Několik pojmů

..aneb proč se v práci slovo *eficientní* příliš nevyskytuje

- Neexistuje jednotná definice eficientního aktiva.
- Budeme pracovat se třemi specifikacemi aktiv, která někteří označují jako eficienci:
  - Přijatelnost
  - Striktní přijatelnost
  - Optimalita

Několik pojmů

..aneb proč se v práci slovo *eficientní* příliš nevyskytuje

- Neexistuje jednotná definice eficientního aktiva.
- Budeme pracovat se třemi specifikacemi aktiv, která někteří označují jako eficienci:
  - Přijatelnost
  - Striktní přijatelnost
  - Optimalita

Definice

Přijatelnost, striktní přijatelnost a optimalita

Definice: Mějme množinu přípustných aktiv $\mathbb{X}$ a generátor stochastické dominance $U \subset \mathbb{U}$. Řekneme, že aktivum $X \in \mathbb{X}$ je vzhledem k U

- nepřijatelné, jestliže $\exists Y \in \mathbb{X} \quad Y \succ_U X$.
- přijatelné, jestliže není nepřijatelné.
- striktně nepřijatelné, jestliže

$$\exists Y \in \mathbb{X} \qquad \forall u \in U, u \text{ rostoucí na } \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}u(Y) > \mathbb{E}u(X).$$

- striktně přijatelné, jestliže není striktně nepřijatelné.
- optimální, jestliže

$$\exists u \in U, u \text{ rostoucí na } \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y) \qquad \forall Y \in \mathbb{X}.$$

Definice

Přijatelnost, striktní přijatelnost a optimalita

Definice: Mějme množinu přípustných aktiv $\mathbb{X}$ a generátor stochastické dominance $U \subset \mathbb{U}$. Řekneme, že aktivum $X \in \mathbb{X}$ je vzhledem k U

- nepřijatelné, jestliže $\exists Y \in \mathbb{X} \quad Y \succ_U X$.
- přijatelné, jestliže není nepřijatelné.
- striktně nepřijatelné, jestliže

$$\exists Y \in \mathbb{X} \qquad \forall u \in U, u \text{ rostoucí na } \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}u(Y) > \mathbb{E}u(X).$$

- striktně přijatelné, jestliže není striktně nepřijatelné.
- optimální, jestliže

$$\exists u \in U, u \text{ rostoucí na } \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y) \qquad \forall Y \in \mathbb{X}.$$

Definice

Přijatelnost, striktní přijatelnost a optimalita

Definice: Mějme množinu přípustných aktiv $\mathbb{X}$ a generátor stochastické dominance $U \subset \mathbb{U}$. Řekneme, že aktivum $X \in \mathbb{X}$ je vzhledem k U

- nepřijatelné, jestliže $\exists Y \in \mathbb{X} \quad Y \succ_U X$.
- přijatelné, jestliže není nepřijatelné.
- striktně nepřijatelné, jestliže

$$\exists Y \in \mathbb{X} \qquad \forall u \in U, u \text{ rostoucí na } \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}u(Y) > \mathbb{E}u(X).$$

- striktně přijatelné, jestliže není striktně nepřijatelné.
- optimální, jestliže

$$\exists u \in U, u \text{ rostoucí na } \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y) \qquad \forall Y \in \mathbb{X}.$$

Definice

Přijatelnost, striktní přijatelnost a optimalita

Definice: Mějme množinu přípustných aktiv $\mathbb{X}$ a generátor stochastické dominance $U \subset \mathbb{U}$. Řekneme, že aktivum $X \in \mathbb{X}$ je vzhledem k U

- nepřijatelné, jestliže $\exists Y \in \mathbb{X} \quad Y \succ_U X$.
- přijatelné, jestliže není nepřijatelné.
- striktně nepřijatelné, jestliže

$$\exists Y \in \mathbb{X} \qquad \forall u \in U, u \text{ rostoucí na } \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}u(Y) > \mathbb{E}u(X).$$

- striktně přijatelné, jestliže není striktně nepřijatelné.
- optimální, jestliže

$$\exists u \in U, u \text{ rostoucí na } \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y) \qquad \forall Y \in \mathbb{X}.$$

Jednoduché důsledky

..zjevné přímo z definic

- Optimální aktivum je striktně přijatelné.
- Buď U generátor stochastické dominance složený jen z rostoucích funkcí. Aktivum, které je vzhledem k U přijatelné, je vzhledem k U také striktně přijatelné.
- Opačné implikace obecně neplatí.

Jednoduché důsledky
..zjevné přímo z definic

- Optimální aktivum je striktně přijatelné.
- Buď U generátor stochastické dominance složený jen z rostoucích funkcí. Aktivum, které je vzhledem k U přijatelné, je vzhledem k U také striktně přijatelné.
- Opačné implikace obecně neplatí.

Jednoduché důsledky

..zjevné přímo z definic

- Optimální aktivum je striktně přijatelné.
- Buď U generátor stochastické dominance složený jen z rostoucích funkcí. Aktivum, které je vzhledem k U přijatelné, je vzhledem k U také striktně přijatelné.
- Opačné implikace obecně neplatí.

Scénářový přístup

Dále jej budeme předpokládat

- **Definice:** Množiny přípustných portfolií pro matici výnosů $\mathbf{X}_{n\times m}$ s lineárně nezávislými sloupci.
  Povolené krátké prodeje: $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^m : \mathbf{1}'\theta = 1\}$.
  Krátké prodeje omezené koeficientem $a \in (-\infty, 0]$:
  $$\Theta_a = \{\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)' \in \mathbb{R}^m : \mathbf{1}'\theta = 1, \theta_i \geq a, i = 1, \dots, m\}.$$
- **Definice:** $\tilde{\Theta}$ množina příp. portfolií, $\mathbb{V} = \left\{\mathbf{X}\theta : \theta \in \tilde{\Theta}\right\}$. Za množinu $\mathbb{X}$ přípustných aktiv generovanou maticí $\mathbf{X}$ považujeme množinu náhodných veličin X splňujících
  $$\exists v \in \mathbb{V} \qquad P(X = v_i) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{v_k = v_i}}{n}.$$
  X je scénářové aktivum reprezentované vektorem v.

Scénářový přístup

Dále jej budeme předpokládat

- **Definice:** Množiny přípustných portfolií pro matici výnosů $\mathbf{X}_{n\times m}$ s lineárně nezávislými sloupci.
  Povolené krátké prodeje: $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^m : \mathbf{1}'\theta = 1\}$.
  Krátké prodeje omezené koeficientem $a \in (-\infty, 0]$:
  $$\Theta_a = \{\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)' \in \mathbb{R}^m : \mathbf{1}'\theta = 1, \theta_i \geq a, i = 1, \ldots, m\}.$$
- **Definice:** $\tilde{\Theta}$ množina příp. portfolií, $\mathbb{V} = \left\{\mathbf{X}\theta : \theta \in \tilde{\Theta}\right\}$. Za množinu $\mathbb{X}$ přípustných aktiv generovanou maticí $\mathbf{X}$ považujeme množinu náhodných veličin X splňujících
  $$\exists v \in \mathbb{V} \qquad P(X = v_i) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{v_k = v_i}}{n}.$$
  X je scénářové aktivum reprezentované vektorem v.

Interpretace a poznámky

- Volně řečeno: Sloupce matice $\mathbf{X}$ odpovídají výnosům m lineárně nezávislých aktiv, řádky reprezentují n stejně pravděpodobných scénářů. Dále připouštíme aktiva vzniklá kombinacemi sloupců podle koeficientů z množiny přípustných portfolií.
- Pojmy jako (striktní) stoch. dominance a všechny uvedené druhy eficience definujeme pro přípustné portfolio θ pomocí aktiva reprezentovaného vektorem $\mathbf{X}\theta$.
- Pro aktivum X reprezentované vektorem $\mathbf{X}\theta$ je

$$\mathbb{E}u(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u((\mathbf{X}\theta)_i).$$

Obsah

Tvar množin přijatelných, striktně přijatelných a optimálních portfolií
Souvislost

- Množiny portfolií striktně přijatelných a optimálních vzhledem ke stochastické dominanci prvního řádu, při zakázaných krátkých prodejích, obecně nejsou souvislé. (Kopa, Post, 2009)
- V diplomové práci analyzuji souvislost množin portfolií optimálních vzhledem k obloukově souvislým generátorům tvořeným striktně konkávními funkcemi, při omezených krátkých prodejích.

Tvar množin přijatelných, striktně přijatelných a optimálních portfolií

Souvislost

- Množiny portfolií striktně přijatelných a optimálních vzhledem ke stochastické dominanci prvního řádu, při zakázaných krátkých prodejích, obecně nejsou souvislé. (Kopa, Post, 2009)
- V diplomové práci analyzuji souvislost množin portfolií optimálních vzhledem k obloukově souvislým generátorům tvořeným striktně konkávními funkcemi, při omezených krátkých prodejích.

Tvar množin přijatelných, striktně přijatelných a optimálních portfolií

Konvexita

- V případě stochastické dominance prvního řádu není ani jedna z množin obecně konvexní.
- Množina portfolií optimálních vzhledem k U_2 není obecně konvexní, jak při omezených, tak při povolených krátkých prodejích (Dybvig, Ross, 1983).
- Množina portfolií přijatelných vzhledem k U_N a U_∞ není při zakázaných krátkých prodejích obecně konvexní (Kopa, 2008).
- Ve své diplomové práci hledám nutnou a postačující podmínku pro rozměry matice výnosů $\mathbf{X}$, zaručující konvexitu množiny portfolií optimálních vzhledem k U_E^*, při povolených krátkých prodejích.

Tvar množin přijatelných, striktně přijatelných a optimálních portfolií

Konvexita

- V případě stochastické dominance prvního řádu není ani jedna z množin obexně konvexní.
- Množina portfolií optimálních vzhledem k U_2 není obecně konvexní, jak při omezených, tak při povolených krátkých prodejích (Dybvig, Ross, 1983).
- Množina portfolií přijatelných vzhledem k U_N a U_∞ není při zakázaných krátkých prodejích obecně konvexní (Kopa, 2008).
- Ve své diplomové práci hledám nutnou a postačující podmínku pro rozměry matice výnosů $\mathbf{X}$, zaručující konvexitu množiny portfolií optimálních vzhledem k U_E^*, při povolených krátkých prodejích.

Tvar množin přijatelných, striktně přijatelných a optimálních portfolií

Konvexita

- V případě stochastické dominance prvního řádu není ani jedna z množin obexně konvexní.
- Množina portfolií optimálních vzhledem k U_2 není obecně konvexní, jak při omezených, tak při povolených krátkých prodejích (Dybvig, Ross, 1983).
- Množina portfolií přijatelných vzhledem k U_N a U_∞ není při zakázaných krátkých prodejích obecně konvexní (Kopa, 2008).
- Ve své diplomové práci hledám nutnou a postačující podmínku pro rozměry matice výnosů $\mathbf{X}$, zaručující konvexitu množiny portfolií optimálních vzhledem k U_E^*, při povolených krátkých prodejích.

Tvar množin přijatelných, striktně přijatelných a optimálních portfolií
Konvexita

- V případě stochastické dominance prvního řádu není ani jedna z množin obexně konvexní.
- Množina portfolií optimálních vzhledem k U_2 není obecně konvexní, jak při omezených, tak při povolených krátkých prodejích (Dybvig, Ross, 1983).
- Množina portfolií přijatelných vzhledem k U_N a U_∞ není při zakázaných krátkých prodejích obecně konvexní (Kopa, 2008).
- Ve své diplomové práci hledám nutnou a postačující podmínku pro rozměry matice výnosů $\mathbf{X}$, zaručující konvexitu množiny portfolií optimálních vzhledem k U_E^*, při povolených krátkých prodejích.

Souvislost množiny optimálních portfolií

Definice

Souvislost a oblouková souvislost

- Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, ρ) je souvislá, jestliže neexistují neprázdné otevřené množiny A_1, A_2 splňující

$$A = A_1 \cup A_2 \qquad \text{a} \qquad A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

- Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, ρ) je obloukově souvislá, jestliže mezi každou dvojicí jejich bodů lze sestrojit spojitý oblouk, tedy

$$\forall x, y \in A \quad \exists f : [0, 1] \rightarrow (A, \rho) \text{ spojitá},$$

splňující $f(0) = x, \quad f(1) = y$.

- Obloukově souvislá množina je souvislá.

Definice
Souvislost a oblouková souvislost

- Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, ρ) je souvislá, jestliže neexistují neprázdné otevřené množiny A_1, A_2 splňující

$$A = A_1 \cup A_2 \qquad \text{a} \qquad A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

- Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, ρ) je obloukově souvislá, jestliže mezi každou dvojicí jejich bodů lze sestrojit spojitý oblouk, tedy

$$\forall x, y \in A \quad \exists f : [0, 1] \to (A, \rho) \text{ spojitá},$$

splňující $f(0) = x, \quad f(1) = y$.
- Obloukově souvislá množina je souvislá.

Předpoklady

- Opět uvažujeme scénářový přístup.
- Pracujeme s množinou $\hat{U}$ a supremovou metrikou ρ:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \in \mathcal{C}^2, u'(x) > 0, u^{(2)}(x) < 0, x \in \mathbb{R}\} \\ \rho(u_1, u_2) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_1(x) - u_2(x)|, \qquad u_1, u_2 \in \hat{U}. \end{aligned}$$

- Omezujeme krátké prodeje, tedy

$$\Theta_a = \{\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)' \in \mathbb{R}^m : \mathbf{1}'\theta = 1, \theta_i \geq a, i = 1, \ldots, m\},$$

pro pevné $a \in (-\infty, 0]$.

Hlavní výsledek kapitoly

Věta:
Buď $U \subset \hat{U}$ množina užitkových funkcí obloukově souvislá vzhledem k supremové metrice ρ a nechť $a \in (-\infty, 0]$. Pak množina portfolií z Θ_a optimálních vzhledem k U je obloukově souvislá.

Hlavní myšlenky důkazu

- Definujeme zobrazení

$$g : (\hat{U}, \rho) \to (\Theta_a, \sigma) \qquad g(u) = \arg\max_{\theta \in \Theta_a} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u((\mathbf{X}\theta)_i).$$

- Přesvědčíme se, že zobrazení g je dobře definováno a že je spojité (σ - libovolná metrika).
- Množinou portfolií optimálních vzhledem k $U \subset \hat{U}$ je $g(U)$.
- Je-li $U \subset \hat{U}$ obloukově souvislá množina, existuje pro libovolná portfolia τ, λ spojitý oblouk f mezi funkcemi

$$u_\tau, u_\lambda \qquad \tau = g(u_\tau), \lambda = g(u_\lambda).$$

Pak ovšem $g \circ f$ je spojitý oblouk mezi τ a λ.

Hlavní myšlenky důkazu

- Definujeme zobrazení

$$g : (\hat{U}, \rho) \to (\Theta_a, \sigma) \qquad g(u) = \arg\max_{\theta \in \Theta_a} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u((\mathbf{X}\theta)_i).$$

- Přesvědčíme se, že zobrazení g je dobře definováno a že je spojité (σ - libovolná metrika).
- Množinou portfolií optimálních vzhledem k $U \subset \hat{U}$ je $g(U)$.
- Je-li $U \subset \hat{U}$ obloukově souvislá množina, existuje pro libovolná portfolia τ, λ spojitý oblouk f mezi funkcemi

$$u_\tau, u_\lambda \qquad \tau = g(u_\tau), \lambda = g(u_\lambda).$$

Pak ovšem $g \circ f$ je spojitý oblouk mezi τ a λ.

Hlavní myšlenky důkazu

- Definujeme zobrazení

$$g : (\hat{U}, \rho) \to (\Theta_a, \sigma) \qquad g(u) = \arg\max_{\theta \in \Theta_a} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u((\mathbf{X}\theta)_i).$$

- Přesvědčíme se, že zobrazení g je dobře definováno a že je spojité (σ - libovolná metrika).
- Množinou portfolií optimálních vzhledem k $U \subset \hat{U}$ je $g(U)$.
- Je-li $U \subset \hat{U}$ obloukově souvislá množina, existuje pro libovolná portfolia τ, λ spojitý oblouk f mezi funkcemi

$$u_\tau, u_\lambda \qquad \tau = g(u_\tau), \lambda = g(u_\lambda).$$

Pak ovšem $g \circ f$ je spojitý oblouk mezi τ a λ.

Hlavní myšlenky důkazu

- Definujeme zobrazení

$$g : (\hat{U}, \rho) \to (\Theta_a, \sigma) \qquad g(u) = \arg\max_{\theta \in \Theta_a} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u((\mathbf{X}\theta)_i).$$

- Přesvědčíme se, že zobrazení g je dobře definováno a že je spojité (σ - libovolná metrika).
- Množinou portfolií optimálních vzhledem k $U \subset \hat{U}$ je $g(U)$.
- Je-li $U \subset \hat{U}$ obloukově souvislá množina, existuje pro libovolná portfolia τ, λ spojitý oblouk f mezi funkcemi

$$u_\tau, u_\lambda \qquad \tau = g(u_\tau), \lambda = g(u_\lambda).$$

Pak ovšem $g \circ f$ je spojitý oblouk mezi τ a λ.

Obsah

Předpoklady

- Připomeňme $U_E^* = \{u : u(x) = ae^{kx} + b, a < 0, k < 0, b \in \mathbb{R}\}$ a definujme $U_E = \{u : u(x) = -e^{kx}, k < 0\}$. Práce s oběma generátory je pro stochastickou dominanci ekvivalentní. Volíme množinu U_E.
- Pro vyšetřování souvislosti pracujeme s množinou přípustných portfolií Θ_a, $a \in (-\infty, 0]$, omezení a může být libovolně volné. Pro vyšetřování konvexity pracujeme s množinou Θ.

Předpoklady

- Připomeňme $U_E^* = \{u : u(x) = ae^{kx} + b, a < 0, k < 0, b \in \mathbb{R}\}$ a definujme $U_E = \{u : u(x) = -e^{kx}, k < 0\}$. Práce s oběma generátory je pro stochastickou dominanci ekvivalentní. Volíme množinu U_E.
- Pro vyšetřování souvislosti pracujeme s množinou přípustných portfolií Θ_a, $a \in (-\infty, 0]$, omezení a může být libovolně volné. Pro vyšetřování konvexity pracujeme s množinou Θ.

Obsah

Souvislost množiny optimálních portfolií

- Množina Θ_a, $a \in (-\infty, 0]$ a generátor U_E.
- Množina optimálních portfolií je souvislá pro každou matici $\mathbf{X}_{n \times m}$ s linárně nezávislými sloupci - aplikace věty dokázané v předchozí části.

Souvislost množiny optimálních portfolií

- Množina $\Theta_a, a \in (-\infty, 0]$ a generátor U_E.
- Množina optimálních portfolií je souvislá pro každou matici $\mathbf{X}_{n\times m}$ s linárně nezávislými sloupci - aplikace věty dokázané v předchozí části.

Obsah

Specifikace úlohy

- Pracujeme s generátorem U_E. Mějme matici výnosů $\mathbf{X}_{n\times m}$ s lineárně nezávislými sloupci $(X_1, \ldots, X_m)$ a označme množinu optimálních portfolií $\mathcal{E}$, kde je $\mathcal{E} \subset \Theta$. Dále označme $\mathcal{E}^* = \mathbf{X}\mathcal{E}$.
- **Úloha:** Rozhodněte, při kterých rozměrech $\mathbf{X}$ je $\mathcal{E}$ obecně konvexní.
- Místo konvexity $\mathcal{E}$ lze ekvivalentně vyšetřovat konvexitu $\mathcal{E}^*$.

Specifikace úlohy

- Pracujeme s generátorem U_E. Mějme matici výnosů $\mathbf{X}_{n\times m}$ s lineárně nezávislými sloupci $(X_1, \ldots, X_m)$ a označme množinu optimálních portfolií $\mathcal{E}$, kde je $\mathcal{E} \subset \Theta$. Dále označme $\mathcal{E}^* = \mathbf{X}\mathcal{E}$.
- **Úloha:** Rozhodněte, při kterých rozměrech **X** je $\mathcal{E}$ obecně konvexní.
- Místo konvexity $\mathcal{E}$ lze ekvivalentně vyšetřovat konvexitu $\mathcal{E}^*$.

Specifikace úlohy

- Pracujeme s generátorem U_E. Mějme matici výnosů $\mathbf{X}_{n\times m}$ s lineárně nezávislými sloupci $(X_1, \ldots, X_m)$ a označme množinu optimálních portfolií $\mathcal{E}$, kde je $\mathcal{E} \subset \Theta$. Dále označme $\mathcal{E}^* = \mathbf{X}\mathcal{E}$.
- **Úloha:** Rozhodněte, při kterých rozměrech $\mathbf{X}$ je $\mathcal{E}$ obecně konvexní.
- Místo konvexity $\mathcal{E}$ lze ekvivalentně vyšetřovat konvexitu $\mathcal{E}^*$.

Přepis úlohy

- Pro $s = (s_1, \ldots, s_n)' \in \mathbb{R}^n$ definujme $e^s = (e^{s_1}, \ldots, e^{s_n})'$. Portfolio $\tau \in \Theta$ leží v $\mathcal{E}$, právě když

$$\begin{aligned} \exists k < 0 : &\quad (X_1 - X_j)' \cdot e^{k\cdot(\mathbf{X}\tau)} = 0, \quad \forall j = 2, \ldots, m \\ \text{tedy } \exists k < 0 : &\quad e^{k(\mathbf{X}\tau)} \in \langle\{X_1 - X_i, i = 2, \ldots, m\}\rangle^{\perp} = S. \end{aligned}$$

Závěry vyšetřování konvexity

Rozměry matice $\mathbf{X}_{n\times m}$ zaručující konvexitu $\mathcal{E}$

- $m = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
- $m = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Konvexita $\mathcal{E}$ vyplývá ze souvislosti této množiny.
- $m = n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Důkaz konvexity využívá skutečnost, že prostor S je jednorozměrný.
- V ostatních případech $\mathcal{E}$ obecně konvexní není.

Závěry vyšetřování konvexity

Rozměry matice $\mathbf{X}_{n\times m}$ zaručující konvexitu $\mathcal{E}$

- $m = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
- $m = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Konvexita $\mathcal{E}$ vyplývá ze souvislosti této množiny.
- $m = n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Důkaz konvexity využívá skutečnost, že prostor S je jednorozměrný.
- V ostatních případech $\mathcal{E}$ obecně konvexní není.

Závěry vyšetřování konvexity

Rozměry matice $\mathbf{X}_{n \times m}$ zaručující konvexitu $\mathcal{E}$

- $m = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
- $m = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Konvexita $\mathcal{E}$ vyplývá ze souvislosti této množiny.
- $m = n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Důkaz konvexity využívá skutečnost, že prostor S je jednorozměrný.
- V ostatních případech $\mathcal{E}$ obecně konvexní není.

Závěry vyšetřování konvexity

Rozměry matice $\mathbf{X}_{n\times m}$ zaručující konvexitu $\mathcal{E}$

- $m = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
- $m = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Konvexita $\mathcal{E}$ vyplývá ze souvislosti této množiny.
- $m = n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Důkaz konvexity využívá skutečnost, že prostor S je jednorozměrný.
- V ostatních případech $\mathcal{E}$ obecně konvexní není.

Závěry vyšetřování konvexity 2

Matice výnosů **X** o rozměrech 4×3 nezaručuje konvexitu $\mathcal{E}$

- Nechť $m = 3$, $n = 4$. Pak existuje matice $\mathbf{X}_{4\times 3}$ s lineárně nezávislými sloupci, pro kterou množina $\mathcal{E}$ není konvexní.

Závěry vyšetřování konvexity 3

Protipříklad pro úlohu $m = 3$, $n = 4$

- Protipříklad. Zvolme

$$
\begin{aligned}
c &= 3 \cdot \frac{2^{-\frac{8}{13}} - 2^{-\frac{12}{13}}}{1 - 2^{-\frac{12}{13}}} &\approx 0.796 \\
d &= 3 \cdot \frac{1 - 2^{-\frac{8}{13}}}{2 - 2^{-\frac{1}{13}}} &\approx 1.102
\end{aligned}
$$

a položme

$$
\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 4 + c \\ 3 & 3 & 3 + d \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.
$$

- Portfolia $(1, 0, 0)', (-3, 4, 0)' \in \mathcal{E}$, portfolio $(-1, 2, 0)' \notin \mathcal{E}$.

Závěry vyšetřování konvexity 3

Protipříklad pro úlohu $m = 3, n = 4$

- Protipříklad. Zvolme

$$
\begin{aligned}
c &= 3 \cdot \frac{2^{-\frac{8}{13}} - 2^{-\frac{12}{13}}}{1 - 2^{-\frac{12}{13}}} &\approx& \quad 0.796 \\
d &= 3 \cdot \frac{1 - 2^{-\frac{8}{13}}}{2 - 2^{-\frac{1}{13}}} &\approx& \quad 1.102
\end{aligned}
$$

a položme

$$
\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 4+c \\ 3 & 3 & 3+d \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.
$$

- Portfolia $(1,0,0)', (-3,4,0)' \in \mathcal{E}$, portfolio $(-1,2,0)' \notin \mathcal{E}$.

Závěry vyšetřování konvexity 4

Rozšíření výsledku pro $m = 3$, $n = 4$ pro matice $\mathbf{X}$ vyšší dimenze

- Za pomoci uvedené matice lze protipříklad rozšířit pro $m \geq 3$ a $n \geq m + 1$.
- Jedná se pouze o technické úpravy.

Závěry vyšetřování konvexity 4

Rozšíření výsledku pro $m = 3, n = 4$ pro matice **X** vyšší dimenze

- Za pomoci uvedené matice lze protipříklad rozšířit pro $m \geq 3$ a $n \geq m + 1$.
- Jedná se pouze o technické úpravy.

Obsah

Příklad

Striktně přijatelné portfolio nemusí být optimální

- Mějme matici

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

a testujme přijatelnost a optimalitu portfolia $\tau = (1, 0)'$

- Uvažujeme generátor U_E a povolené krátké prodeje.
- Vypočteme, že portfolio τ je přijatelné a striktně přijatelné, ale není optimální.
- Tento příklad ukazuje, že se množiny striktně přijatelných a optimálních portfolií obecně liší.

Příklad

Striktně přijatelné portfolio nemusí být optimální

- Mějme matici

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

  a testujme přijatelnost a optimalitu portfolia $\tau = (1, 0)'$
- Uvažujeme generátor U_E a povolené krátké prodeje.
- Vypočteme, že portfolio τ je přijatelné a striktně přijatelné, ale není optimální.
- Tento příklad ukazuje, že se množiny striktně přijatelných a optimálních portfolií obecně liší.

Příklad

Striktně přijatelné portfolio nemusí být optimální

- Mějme matici
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$
a testujme přijatelnost a optimalitu portfolia $\tau = (1, 0)'$
- Uvažujeme generátor U_E a povolené krátké prodeje.
- Vypočteme, že portfolio τ je přijatelné a striktně přijatelné, ale není optimální.
- Tento příklad ukazuje, že se množiny striktně přijatelných a optimálních portfolií obecně liší.

Příklad

Striktně přijatelné portfolio nemusí být optimální

- Mějme matici
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$
a testujme přijatelnost a optimalitu portfolia $\tau = (1, 0)'$
- Uvažujeme generátor U_E a povolené krátké prodeje.
- Vypočteme, že portfolio τ je přijatelné a striktně přijatelné, ale není optimální.
- Tento příklad ukazuje, že se množiny striktně přijatelných a optimálních portfolií obecně liší.

Spojení striktní přijatelnosti a optimality

Po zvolení vhodných předpokladů

- Uvažujme krátké prodeje omezené libovolným pevným $a \in (-\infty, 0]$.
- Pro pevné $p < -1$ zaveďme generátor

$$U_E'(p) = \left\{ u : u(x) = -(te^{kx} + (1-t)e^{lx}), k \in \left[p, \frac{1}{p}\right], l \in \left[p, \frac{1}{p}\right], t \in [0,1] \right\}.$$

- Pro pevné $\tau \in \Theta_a$ definujeme $f_\tau : (\Theta_a \times \mathbb{U}) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f_\tau(\theta, u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[u((\mathbf{X}\theta)_i) - u((\mathbf{X}\tau)_i) \right].$$

Spojení striktní přijatelnosti a optimality

Po zvolení vhodných předpokladů

- Uvažujme krátké prodeje omezené libovolným pevným $a \in (-\infty, 0]$.
- Pro pevné $p < -1$ zaveďme generátor

$$U_E'(p) = \left\{ u : u(x) = -(te^{kx} + (1-t)e^{lx}), k \in \left[p, \frac{1}{p}\right], l \in \left[p, \frac{1}{p}\right], t \in [0,1] \right\}.$$

- Pro pevné $\tau \in \Theta_a$ definujeme $f_\tau : (\Theta_a \times \mathbb{U}) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f_\tau(\theta, u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [u((\mathbf{X}\theta)_i) - u((\mathbf{X}\tau)_i)] .$$

Spojení striktní přijatelnosti a optimality

Po zvolení vhodných předpokladů

- Uvažujme krátké prodeje omezené libovolným pevným $a \in (-\infty, 0]$.
- Pro pevné $p < -1$ zaveďme generátor

$$U'_E(p) = \left\{ u : u(x) = -(te^{kx} + (1-t)e^{lx}), k \in \left[p, \frac{1}{p}\right], \right. \left. l \in \left[p, \frac{1}{p}\right], t \in [0,1] \right\}.$$

- Pro pevné $\tau \in \Theta_a$ definujeme $f_\tau : (\Theta_a \times \mathbb{U}) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f_\tau(\theta, u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[u((\mathbf{X}\theta)_i) - u((\mathbf{X}\tau)_i) \right].$$

Spojení striktní přijatelnosti a optimality

Jako důsledek minimaxové věty

- Lze dokázat, že pro libovolné $\tau \in \Theta_a$ je

$$\max_{\theta \in \Theta_a} \min_{v \in U'_E(p)} f_\tau(\theta, v) = \sup_{\theta \in \Theta_a} \inf_{v \in U'_E(p)} f_\tau(\theta, v) =$$

$$= \inf_{v \in U'_E(p)} \sup_{\theta \in \Theta_a} f_\tau(\theta, v) = \min_{v \in U'_E(p)} \max_{\theta \in \Theta_a} f_\tau(\theta, v).$$

- Má-li tento výraz nulovou hodnotu, je portfolio τ optimální, přijatelné i striktně přijatelné. Platí i opačná implikace.

Spojení striktní přijatelnosti a optimality

Jako důsledek minimaxové věty

- Lze dokázat, že pro libovolné $\tau \in \Theta_a$ je

$$\max_{\theta \in \Theta_a} \min_{v \in U'_E(p)} f_\tau(\theta, v) = \sup_{\theta \in \Theta_a} \inf_{v \in U'_E(p)} f_\tau(\theta, v) =$$

$$= \inf_{v \in U'_E(p)} \sup_{\theta \in \Theta_a} f_\tau(\theta, v) = \min_{v \in U'_E(p)} \max_{\theta \in \Theta_a} f_\tau(\theta, v).$$

- Má-li tento výraz nulovou hodnotu, je portfolio τ optimální, přijatelné i striktně přijatelné. Platí i opačná implikace.

Závěr

Závěr

- Zavedli jsme používané pojmy, včetně tří různých definic eficientního portfolia.
- Shrnuli jsme dosavadní výsledky.
- Dokázali jsme souvislost množiny portfolií optimálních vzhledem k obloukově souvislému generátoru, tvořenému ze striktně konkávních funkcí, při omezených krátkých prodejích.
- Formulovali jsme nutnou a postačující podmínku pro rozměry matice výnosů zaručující konvexitu množin portfolií optimálních vzhledem k exponenciálním funkcím, při povolených krátkých prodejích. Formulovali jsme postačující podmínku pro ekvivalenci tří používaných definic eficience.

Závěr

- Zavedli jsme používané pojmy, včetně tří různých definic eficientního portfolia.
- Shrnuli jsme dosavadní výsledky.
- Dokázali jsme souvislost množiny portfolií optimálních vzhledem k obloukově souvislému generátoru, tvořenému ze striktně konkávních funkcí, při omezených krátkých prodejích.
- Formulovali jsme nutnou a postačující podmínku pro rozměry matice výnosů zaručující konvexitu množin portfolií optimálních vzhledem k exponenciálním funkcím, při povolených krátkých prodejích. Formulovali jsme postačující podmínku pro ekvivalenci tří používaných definic eficience.

Závěr

- Zavedli jsme používané pojmy, včetně tří různých definic eficientního portfolia.
- Shrnuli jsme dosavadní výsledky.
- Dokázali jsme souvislost množiny portfolií optimálních vzhledem k obloukově souvislému generátoru, tvořenému ze striktně konkávních funkcí, při omezených krátkých prodejích.
- Formulovali jsme nutnou a postačující podmínku pro rozměry matice výnosů zaručující konvexitu množin portfolií optimálních vzhledem k exponenciálním funkcím, při povolených krátkých prodejích. Formulovali jsme postačující podmínku pro ekvivalenci tří používaných definic eficience.

Závěr

- Zavedli jsme používané pojmy, včetně tří různých definic eficientního portfolia.
- Shrnuli jsme dosavadní výsledky.
- Dokázali jsme souvislost množiny portfolií optimálních vzhledem k obloukově souvislému generátoru, tvořenému ze striktně konkávních funkcí, při omezených krátkých prodejích.
- Formulovali jsme nutnou a postačující podmínku pro rozměry matice výnosů zaručující konvexitu množin portfolií optimálních vzhledem k exponenciálním funkcím, při povolených krátkých prodejích. Formulovali jsme postačující podmínku pro ekvivalenci tří používaných definic eficience.

Závěr

Konec prezentace.

Odpověď k oponentskému posudku
Část 1

- *Nedávají zcela smysl některé komentáře, např. poznámka na str. 34 nebo konvexnost množiny portfolií eficientních vzhledem k Markowitzovu modelu (str. 23).*
- Poznámkou na str. 34 je de facto myšleno, že v důkazu Věty 5.2 volíme jinou terminologii, než která je uvedena např. ve skriptech Doc. Lachouta Matematické programování. Přesto je v důkazu postupováno v souladu s těmito skripty. Proto má oponent pravdu, poznámka není formulována přesně.
- Na str. 23 jsem měl na mysli úlohu s povolenými krátkými prodeji, ve které lze, za splnění jistých předpokladů, hovořit o konvexitě množiny markowitzovsky eficientních portfolií. Poznámka není formulována přesně.

Odpověď k oponentskému posudku
Část 1

- *Nedávají zcela smysl některé komentáře, např. poznámka na str. 34 nebo konvexnost množiny portfolií eficientních vzhledem k Markowitzovu modelu (str. 23).*
- Poznámkou na str. 34 je de facto myšleno, že v důkazu Věty 5.2 volíme jinou terminologii, než která je uvedena např. ve skriptech Doc. Lachouta Matematické programování. Přesto je v důkazu postupováno v souladu s těmito skripty. Proto má oponent pravdu, poznámka není formulována přesně.
- Na str. 23 jsem měl na mysli úlohu s povolenými krátkými prodeji, ve které lze, za splnění jistých předpokladů, hovořit o konvexitě množiny markowitzovsky eficientních portfolií. Poznámka není formulována přesně.

Odpověď k oponentskému posudku

Část 1

- *Nedávají zcela smysl některé komentáře, např. poznámka na str. 34 nebo konvexnost množiny portfolií eficientních vzhledem k Markowitzovu modelu (str. 23).*
- Poznámkou na str. 34 je de facto myšleno, že v důkazu Věty 5.2 volíme jinou terminologii, než která je uvedena např. ve skriptech Doc. Lachouta Matematické programování. Přesto je v důkazu postupováno v souladu s těmito skripty. Proto má oponent pravdu, poznámka není formulována přesně.
- Na str. 23 jsem měl na mysli úlohu s povolenými krátkými prodeji, ve které lze, za splnění jistých předpokladů, hovořit o konvexitě množiny markowitzovsky eficientních portfolií. Poznámka není formulována přesně.

Odpověď k oponentskému posudku
Část 2

- *Vhodné by bylo uvést znění Bernsteinovy věty zmíněné na str. 43.*
- Bernsteinovu větu jsem neuvedl, jelikož v práci pracujeme pouze se závěrem, který za použití této věty učinil Whitmore (1989, 1994). Přesto jsem se nyní přesvědčil, že vět o tomto názvu je více, proto její znění uvedu.
- Bernsteinova věta: Jestliže f je omezená a absolutně monotónní funkce na intervalu $(0, \infty)$, pak existuje jednoznačně určená Borelova míra μ na intervalu $[0, \infty]$, splňující $\mu([0, \infty]) = f(0_+)$ a pro každé $x > 0$:

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} d\mu(\alpha).$$

Odpověď k oponentskému posudku
Část 2

- *Vhodné by bylo uvést znění Bernsteinovy věty zmíněné na str. 43.*
- Bernsteinovu větu jsem neuvedl, jelikož v práci pracujeme pouze se závěrem, který za použití této věty učinil Whitmore (1989, 1994). Přesto jsem se nyní přesvědčil, že vět o tomto názvu je více, proto její znění uvedu.
- Bernsteinova věta: Jestliže f je omezená a absolutně monotónní funkce na intervalu $(0, \infty)$, pak existuje jednoznačně určená Borelova míra μ na intervalu $[0, \infty]$, splňující $\mu([0, \infty]) = f(0_+)$ a pro každé $x > 0$:

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} d\mu(\alpha).$$

Odpověď k oponentskému posudku
Část 2

- *Vhodné by bylo uvést znění Bernsteinovy věty zmíněné na str. 43.*
- Bernsteinovu větu jsem neuvedl, jelikož v práci pracujeme pouze se závěrem, který za použití této věty učinil Whitmore (1989, 1994). Přesto jsem se nyní přesvědčil, že vět o tomto názvu je více, proto její znění uvedu.
- Bernsteinova věta: Jestliže f je omezená a absolutně monotónní funkce na intervalu $(0, \infty)$, pak existuje jednoznačně určená Borelova míra μ na intervalu $[0, \infty]$, splňující $\mu([0, \infty]) = f(0_+)$ a pro každé $x > 0$:

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} d\mu(\alpha).$$

Odpověď k oponentskému posudku

Část 3

- *Zajímavá (v práci neřešená) otázka je, které výsledky lze použít bez předpokladu stejných pravděpodobností scénářů.*
- Většina výsledků zůstane v platnosti, i když se některé řádky matice výnosů $\mathbf{X}$ nebudou navzájem lišit (lineární nezávislost sloupců však musí zůstat zachována). Pomocí tohoto konceptu lze uvažovat, že pracujeme s konečným množstvím scénářů, jejichž pravděpodobnosti nemusejí být stejné, ale jsou vyjádřitelné racionálním číslem.

Odpověď k oponentskému posudku
Část 3

- *Zajímavá (v práci neřešená) otázka je, které výsledky lze použít bez předpokladu stejných pravděpodobností scénářů.*
- Většina výsledků zůstane v platnosti, i když se některé řádky matice výnosů $\mathbf{X}$ nebudou navzájem lišit (lineární nezávislost sloupců však musí zůstat zachována). Pomocí tohoto konceptu lze uvažovat, že pracujeme s konečným množstvím scénářů, jejichž pravděpodobnosti nemusejí být stejné, ale jsou vyjádřitelné racionálním číslem.

Stochastická dominance a optimalita portfolií

Část 1

Martin Dungl

Obsah

Pojmy

- Portfolio = množina finančních aktiv (akcie, dluhopisy, …)
- Výnos portfolia je náhodná veličina
- Investor vybírá portfolio za účelem maximalizace očekávaného a minimalizace rizika
- Očekávaný výnos odpovídá střední hodnotě výnosu

Předpoklady

- Investor se rozhoduje na základě očekávaného výnosu a kovariance výnosů
- Neomezená dělitelnost aktiv
- Neexistují transakční náklady
- Povoleny krátké pozice

Riziko – je třeba zohlednit?

- St Peterburg paradox
  - 1713 Nicholas Bernoulli
  - Házeme mincí, dokud nepadne orel
  - Padne-li orel v n-tém pokusu, dostaneme 2^{n-1} dukátů.
  - Střední hodnota výnosů je nekonečná, přesto by za účast ve hře žádný investor nedal příliš velkou částku.
- Řešení – investor nemaximalizuje výnos, ale užitek. V tomto přístupu je již zohledněno riziko.

Jak vzít v potaz riziko?

- Dva základní přístupy
- 1. Maximalizujeme očekávaný výnos při zohlednění rizika
  - Zavádíme míry rizika
- 2. Maximalizujeme očekávaný užitek
  - Užitková funkce (Von Neumann a Morgenstern, 1944)
  - Sem patří i koncept stochastické dominance

Míry rizika

- Rozptyl výnosů (Markowitz, 1951)
- Semivariance (Markowitz, 1970)
- Střední absolutní odchylka (Sharpe, 1971)
- Value at risk (VaR) (1995)
- Conditional value at risk (CVaR) (Rockafellar a Uryasev, 2000)

Markowitzův model I

Mějme

- S aktiv,
- R_j n.v. vyjadřující výnos j-tého aktiva, $j = 1, \dots, S$,
- C základní kapitál,
- x_j částka investovaná do j-tého aktiva, $j = 1, \dots, S$,
- ρ minimální požadovaný výnos

Výnos portfolia

$$r(x) = \mathbb{E}(R^T x) = \mathbb{E} \sum_{j=1}^{S} R_j x_j$$

Riziko portfolia

$$w(x) = var(R^T x) = \sum_{i,j=1}^{S} cov(R_i, R_j) x_i x_j$$

Markowitzův model II

- Řešíme úlohu

$$\max\ r(x) - k \cdot w(x)\ ,\ k > 0$$

nebo

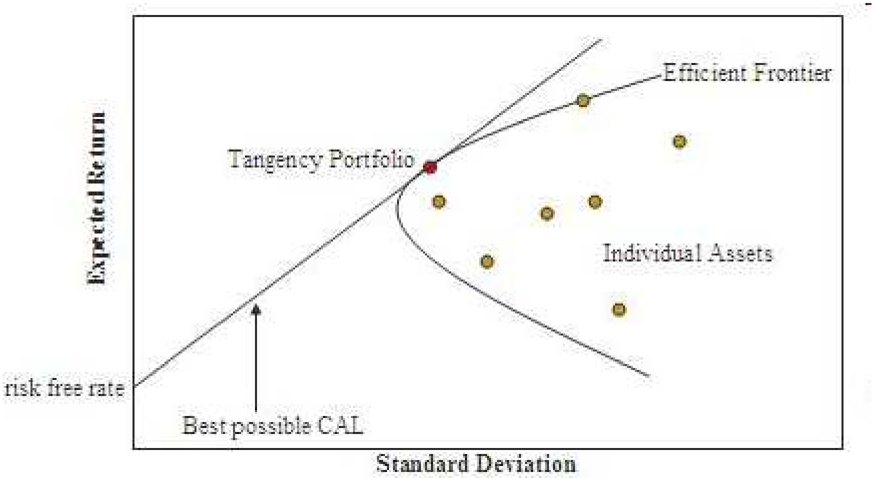
$$\min\ w(x)$$

$$\text{za podmínky}\ \ r(x) > r_0$$

- Řešení pro různá *k* tvoří eficientní hranici (mean-variance efficient frontier)

Markowitzův model III

- Markowitz bullet

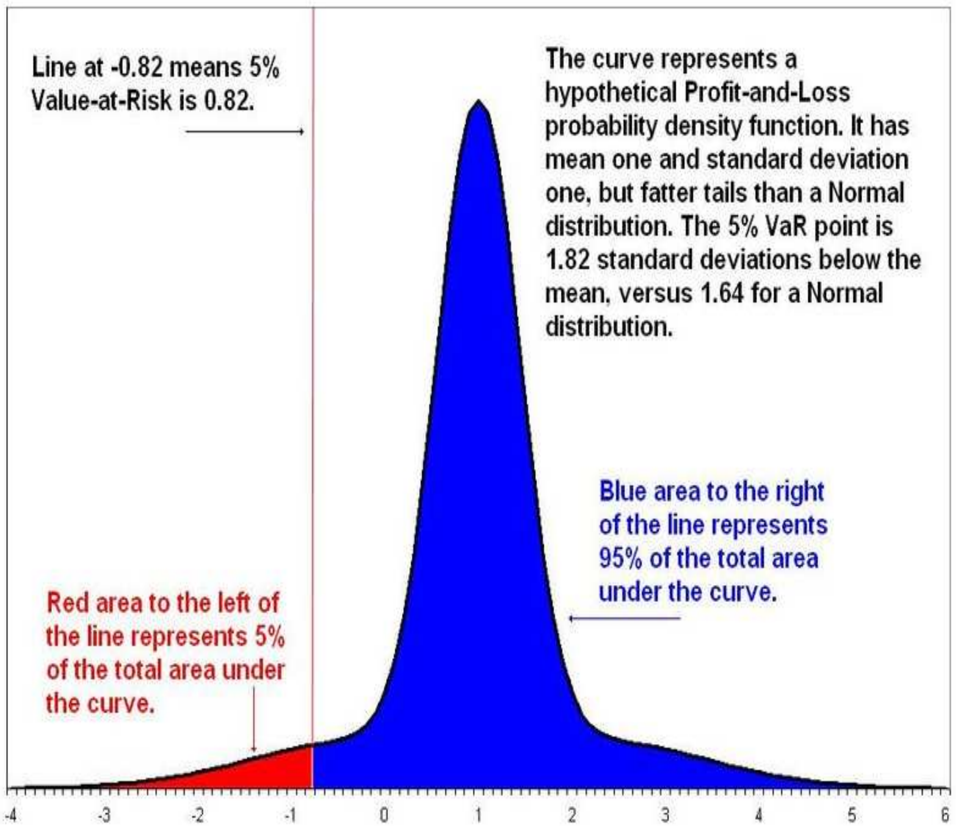


- Markowitzův model lze reprezentovat taktéž pomocí užitkových funkcí

VaR

- Value-at-risk
- *p% - VaR* je příslušný kvantil rozdělení ztrát
- Tedy je to velikost ztrát, kterým se vyhneme s pravděpodobností *p*
- Volíme p = 95%,

  p = 99%



CVaR

- Conditional Value-at-risk nebo též „Expected shortfall“
- Střední hodnota ztrát, jestliže překročí stanovenou hladinu *p*
- Míra zavedena po špatných zkušenostech s VaR (volba rozdělení s těžkými chvosty)
- Lze reprezentovat pomocí konceptu stochastické dominance

Užitkové funkce

- Zavedl Von Neumann a Morgernstern (1944)