

# **KOMPENZACE PORUCH VZORKOVACÍ PERIODY V DISKRÉTNÍCH SYSTÉMECH ŘÍZENÍ LQG**

Jan Cvejn

Univerzita Pardubice  
Fakulta elektrotechniky a informatiky

# ***Obsah***

**I. Úvod**

**II. Formulace problému**

**III. Optimální odhad stavu**

**IV. Optimální algoritmus řízení**

**V. Praktická realizace regulátoru**

**VI. Příklad, simulované výsledky**

# Úvod

Řídicí aplikace založené na využití počítačů, zejm. pokud běží v prostředí běžných operačních systémů

- často vykazují nekonstantnost vzorkovací periody
- nepravidelnosti jsou způsobeny asynchronními událostmi (např. síťová komunikace)

Tento jev je obvykle zanedbáván - diskrétní algoritmy řízení

- zanedbání může v některých případech způsobit horší chování regulačního obvodu
  - o např. pokud se projevují často nebo ještě více vzorkovací perioda není zanedbatelně malá oproti časovým konstantám řízeného systému

Dále je popsán modifikovaný diskrétní algoritmus řízení LQG, který bere v úvahu poruchy vzorkovací periody.

Pro částečnou kompenzaci poruch vzorkování je využít hybridní zákon řízení, který pracuje v diskrétních krocích, ale využívá spojitý model.

Je rovněž ukázáno, že takovýto řídicí systém může být implementován i na poměrně jednoduchých hardwarových platformách.

Dva samostatné problémy:

- optimální estimace stavu
  - o standardní postup
- určení optimálního akčního zásahu

# ***Formulace problému***

Spojité LTI systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{w}(t)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t)$$

dimenze vektorů  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{u}$  jsou  $n$ , resp.  $m$ .

$\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ , and  $\mathbf{L}$  - známé matice odpovídajících rozměrů.

Poruchový vstup  $\mathbf{w}(t)$ , chyba měření  $\mathbf{n}(t)$ :

- vzájemně nekorelované Gaussovské čistě náhodné procesy s nulovou střední hodnotou:

$$E\{\mathbf{w}(t)\} = \mathbf{0}, \quad E\{\mathbf{n}(t)\} = \mathbf{0}$$

$$E\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)\} = \mathbf{W}\delta(t-\tau), \quad E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^T(\tau)\} = \mathbf{N}\delta(t-\tau)$$

Optimální řízení – minimalizuje funkcionál

$$J = \frac{1}{2} E \left\{ \int_0^{t_f} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \right\} \rightarrow \min$$

**Q, R** symetrické pozitivně-definitní matice  
 $t_f$  je dostatečně velká konstanta

Aktuální stav **x** není známý, ale je odhadován z historie hodnot výstupů **y**

Pro LQG řízení – platí 2 principy:

- princip oddělitelnosti („*separation property*“)
  - návrh řízení a estimace stavu je možné oddělit
  - ( předpoklad, že platí i v tomto případě )

- „certainty – equivalence“
  - optimální regulátor je stejný jako pro deterministický systém be poruch
  - ( platí i zde, ale nepředpokládá se )

System je spojity, ale výstup je vzorkován v krocích  $t_0 < t_1 < \dots$

Stejné kroky jsou využity pro výpočet akčních zásahů

Znám aktuální čas  $t_k$

Další body vzorkování  $t_{k+1}, t_{k+2}, \dots$  - náhodné veličiny se středními hodnotami  $\bar{t}_{k+1}, \bar{t}_{k+2}, \dots$

Označme  $\{\hat{t}_i\}$  ... známé okamžiky přerušení, kde  $\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i = T = konst. \dots$

Model vzorkování:

$$\bar{t}_{i+1} = \bar{t}_i + T, \quad i \geq k + 1$$

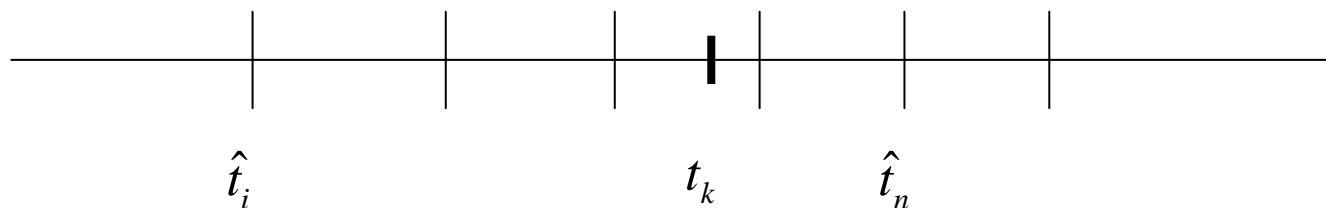
$$\bar{t}_{k+1} = \hat{t}_n$$

$$\hat{t}_n = \min \{ \hat{t}_i \mid \hat{t}_i > t_k + d \}$$

a  $d \in (0, T)$  je známý parametr.

Pro tento model platí:

- významné zpoždění může způsobit výpadek vzorku
- hodnoty  $\bar{t}_{k+1}, \bar{t}_{k+2}, \dots$  jsou ekvidistantní





# Optimální odhad stavu

Kalmanův estimátor s nepravidelným vzorkováním

- nový odhad střední hodnoty stavu je dán:
  - odhadem stavu v předchozím kroku
  - extrapolací stavu a kovariance stavu
  - aktualizací odhadu na základě měřených dat v aktuálním kroku

$\hat{\mathbf{x}}_{k-1} = \hat{\mathbf{x}}(t_{k-1})$  ... známý odhad stavu v čase  $t_{k-1}$

Kovariance stavu – známý odhad v předchozím kroku:

$$\hat{\mathbf{P}}_{k-1} = \hat{\mathbf{P}}(t_{k-1}) = E \left\{ (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \right\}$$

Extrapolace do času  $t_k$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{\Phi}(t_k, t_{k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1}(t) + E \left\{ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{\Phi}(t_k, \tau) [\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{L}\mathbf{w}(\tau)] d\tau \right\} = \\ &= \mathbf{\Phi}(t_k, t_{k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1}(t) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{\Phi}(t_k, \tau) d\tau \cdot \mathbf{G}\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{\Phi}(t_k, t_{k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1}(t) + \mathbf{\Psi}(t_k, t_{k-1})\mathbf{u}_{k-1}\end{aligned}$$

Platí:

$$\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{\Phi}(t_k, t_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{\Phi}(t_k, \tau)\mathbf{L}\mathbf{w}(\tau) d\tau$$

## Extrapolace kovariance stavu

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_k &= E \left\{ (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T \right\} = \mathbf{\Phi}(t_k, t_{k-1}) E \left\{ (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \right\} \mathbf{\Phi}^T(t_k, t_{k-1}) + \\ &+ E \left\{ \left( \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{\Phi}(t_k, \tau) \mathbf{L} \mathbf{w}(\tau) d\tau \right) \left( \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{\Phi}(t_k, \tau) \mathbf{L} \mathbf{w}(\tau) d\tau \right)^T \right\}. \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{P}}_k = \mathbf{\Phi}(t_k, t_{k-1}) \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \mathbf{\Phi}^T(t_k, t_{k-1}) + \mathbf{\Gamma}(t_k, t_{k-1})$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}(t_k, t_{k-1}) &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{\Phi}(t_k, \tau) \mathbf{L} E \left\{ \mathbf{w}(\tau) \mathbf{w}^T(\alpha) \right\} \mathbf{L}^T \mathbf{\Phi}^T(t_k, \alpha) d\alpha d\tau \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{\Phi}(t_k, \tau) \mathbf{L} \mathbf{W} \mathbf{L}^T \mathbf{\Phi}^T(t_k, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Kalmanův filtr:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{\Phi}(t_k - t_{k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{\Psi}(t_k - t_{k-1})\mathbf{u}_{k-1} + \\ + \mathbf{K}_k \left[ \mathbf{y}(t_k) - \mathbf{H}(\mathbf{\Phi}(t_k - t_{k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{\Psi}(t_k - t_{k-1})\mathbf{u}_{k-1}) \right]$$

$$\mathbf{K}_k = \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}^T \left[ \mathbf{H}\bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}^T + \mathbf{N} \right]^{-1}$$

Aktualizace kovariance stavu pro další krok:

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \left[ \bar{\mathbf{P}}_k^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H} \right]^{-1} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \bar{\mathbf{P}}_k$$

Nevýhoda:

- nutnost počítat v každém kroku inverzi matice
- vlivem numerických chyb může být porušena pozitivní definitnost  $\hat{\mathbf{P}}_k$

Jestliže je  $\mathbf{N}$  diagonální, je možné zpracovat jednotlivé složky měření zvlášť

Pro  $i$ -tou složku měření:

$$\hat{\mathbf{P}}_k^{(i+1)} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{h}_i) \hat{\mathbf{P}}_k^{(i)}, \quad \hat{\mathbf{P}}_k^{(0)} = \bar{\mathbf{P}}_k$$

$$\mathbf{K}_k^{(i)} = \frac{1}{\mathbf{h}_i \hat{\mathbf{P}}_k^{(i)} \mathbf{h}_i^T + n_i} \hat{\mathbf{P}}_k^{(i)} \mathbf{h}_i^T$$

$\mathbf{h}_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  - řádky matice  $\mathbf{H}$

$n_i$  ... diagonální prvky  $\mathbf{N}$

Celková aktualizace kovariance stavu je

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \hat{\mathbf{P}}_k^{(r)}$$

Kalmanovo zesílení

$$\mathbf{K}_k = \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} .$$

Jestliže  $\mathbf{N}$  není diagonální

- transformace  $\xi = \mathbf{C}y$  tak, že  $E\{\xi\xi^T\} = \mathbf{I}$

tj.:

$$\mathbf{C}\mathbf{N}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{D}\mathbf{D}^T$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$$

# Algoritmus řízení

V daném kroku je známé  $t_k$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_k$

Pro jednoduchost  $t_i$  ... střední hodnoty  $t_i$  pro  $i \geq k + 1$ .

Hodnota kritéria od  $t_k$  do  $t_f$ :

$$J(t_k) = \frac{1}{2} E \left\{ \sum_{i=k}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \right\}$$

kde  $N$  je dostatečně velké

Kritérium obsahuje informaci o kompletní historii v intervalu  $[0, t_f]$

Označme  $\bar{\mathbf{x}}_i = E \{ \mathbf{x}(t_i) \}$ ,  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(t_i)$ .

Pro  $t \in [t_i, t_{i+1})$  platí

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_i) \mathbf{x}(t_i) + \mathbf{\Psi}(t, t_i) \mathbf{u}_i + \int_{t_i}^t \mathbf{\Phi}(t, \tau) \mathbf{L} \mathbf{w}(\tau) d\tau$$

$$E \left\{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) \right\} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_k^T & \mathbf{u}_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}^T(t, t_k) \\ \mathbf{\Psi}^T(t, t_k) \end{bmatrix} \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_k(t, t_k) & \mathbf{\Psi}_k(t, t_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} +$$

$$+ E \left\{ \int_{t_k}^t \mathbf{w}^T(s) \mathbf{L}^T \mathbf{\Phi}^T(t, s) ds \cdot \mathbf{Q} \int_{t_k}^t \mathbf{\Phi}(t, \tau) \mathbf{L} \mathbf{w}(\tau) d\tau \right\}$$

Druhý člen je roven  $\int_{t_k}^t \text{Tr}(\mathbf{Q} \mathbf{\Phi}(t, \tau) \mathbf{L} \mathbf{W} \mathbf{L}^T \mathbf{\Phi}^T(t, \tau)) d\tau$

Jestliže uvažujeme  $\bar{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k$ , je hodnota kritéria



$$J(t_k) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k^T & \mathbf{u}_k^T \end{bmatrix} \mathbf{U}(t_{k+1} - t_k) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \Xi(t_{k+1} - t_k) + J(t_{k+1})$$

$$\Xi(h) = \int_0^h \int_0^h \text{Tr}(\mathbf{Q}\Phi(t, \tau)\mathbf{L}\mathbf{W}\mathbf{L}^T\Phi^T(t, \tau)) d\tau dt$$

$$J(t_{k+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{N-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_i^T & \mathbf{u}_i^T \end{bmatrix} \mathbf{U}(T) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_i \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} + \frac{N-k-1}{2} \Xi(T)$$

$$\mathbf{U}(h) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}(h) & \tilde{\mathbf{M}}(h) \\ \tilde{\mathbf{M}}^T(h) & \tilde{\mathbf{R}}(h) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}(h) = \int_0^h \Phi^T(\tau)\mathbf{Q}\Phi(\tau) d\tau$$

$$\tilde{\mathbf{R}}(h) = \int_0^h (\Psi^T(\tau)\mathbf{Q}\Psi(\tau) + \mathbf{R}) d\tau$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(h) = \int_0^h \Phi^T(\tau)\mathbf{Q}\Psi(\tau) d\tau$$

Minimální hodnota kritéria :  $J^*(t_k)$

Stochastické členy  $\Xi(t_{k+1} - t_k)$ ,  $\Xi(T)$  neobsahují řízení a stav – je možné je odstranit z minimalizované funkce

Bellmanův princip optimality:

$$J^*(t_k) = \min_{u_k} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k^T & \mathbf{u}_k^T \end{bmatrix} \mathbf{U}(t_{k+1} - t_k) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} + V_{k+1}^* \right\} \\ + \frac{1}{2} \left[ \Xi(t_{k+1} - t_k) + (N - k - 1) \Xi(T) \right]$$

kde

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{N-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_i^T & \mathbf{u}_i^T \end{bmatrix} \mathbf{U}(T) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_i \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix}$$

$$V_{k+1}^* = \min_{\{u_{k+1}, \dots, u_{N-1}\}} \{V_{k+1}\}$$

Minimalizace  $V_{k+1}$  s dynamickým omezením

$$\bar{\mathbf{x}}_{i+1} = [\mathbf{\Phi}(T), \mathbf{\Psi}(T)] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_i \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix}$$

- diskrétní deterministický problém LQ-optimálního řízení

Optimální hodnota  $V$  pro  $N \rightarrow \infty$

$$V_{k+1}^* = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k^T & \mathbf{u}_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}^T(h) \\ \mathbf{\Psi}^T(h) \end{bmatrix} \mathbf{S} [\mathbf{\Phi}(h), \mathbf{\Psi}(h)] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}$$

kde  $h = t_{k+1} - t_k$  ... očekávaná časová vzdálenost příštího vzorku a  $\mathbf{S}$  je ustálené řešení Riccatiho rovnice pro  $\mathbf{S}_N = 0$ :

$$\mathbf{S}_i = \tilde{\mathbf{Q}}(T) + \mathbf{\Phi}^T(T) \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{\Phi}(T) - \\ - \left( \tilde{\mathbf{M}}(T) + \mathbf{\Phi}^T(T) \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{\Psi}(T) \right) \left( \tilde{\mathbf{R}}(T) + \mathbf{\Psi}^T(T) \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{\Psi}(T) \right)^{-1} \left( \tilde{\mathbf{M}}^T(T) + \mathbf{\Psi}^T(T) \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{\Phi}(T) \right).$$

Bod minima  $J(t_k)$ :

$$\mathbf{u}_k^* = \arg \min_{\mathbf{u}_k} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k^T & \mathbf{u}_k^T \end{bmatrix} \mathbf{U}(h) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{x}}_{k+1} \right\} = \arg \min_{\mathbf{u}_k} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k^T & \mathbf{u}_k^T \end{bmatrix} \mathbf{Z}(h) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \right\}$$

kde

$$\mathbf{Z}(h) = \mathbf{U}(h) + \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}^T(h) \mathbf{S} \mathbf{\Phi}(h) & \mathbf{\Phi}^T(h) \mathbf{S} \mathbf{\Psi}(h) \\ \mathbf{\Psi}^T(h) \mathbf{S} \mathbf{\Phi}(h) & \mathbf{\Psi}^T(h) \mathbf{S} \mathbf{\Psi}(h) \end{bmatrix}$$

Řešení:

$$\mathbf{u}_k^* = -\mathbf{E}(h)^{-1} \mathbf{D}(h) \hat{\mathbf{x}}_k$$

kde

$$\mathbf{D}(h) = \tilde{\mathbf{M}}^T(h) + \mathbf{\Psi}^T(h) \mathbf{S} \mathbf{\Phi}(h)$$

$$\mathbf{E}(h) = \tilde{\mathbf{R}}(h) + \mathbf{\Psi}^T(h) \mathbf{S} \mathbf{\Psi}(h)$$

$\mathbf{E}(h)^{-1}$  jistě existuje –  $\tilde{\mathbf{R}}$  and  $\mathbf{S}$  pozitivně definitní

Matice regulátoru  $\mathbf{C}(h) = -\mathbf{E}(h)^{-1} \mathbf{D}(h)$

... závisí na očekávané vzdálenosti příštího vzorku

Ověření:

- položíme  $h = T$
- hodnota kritéria:

$$V^*(t_k) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k^T & \mathbf{u}_k^{*T} \end{bmatrix} \mathbf{Z}(T) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{u}_k^* \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}_k^T \left( \tilde{\mathbf{Q}}(T) + \mathbf{\Phi}^T(T) \mathbf{S} \mathbf{\Phi}(T) \right) \hat{\mathbf{x}}_k - \\ - \hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{D}^T(T) \mathbf{E}^{-T}(T) \mathbf{D}(T) \hat{\mathbf{x}}_k + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{D}^T(T) \mathbf{E}^{-T}(T) \mathbf{E}(T) \mathbf{E}^{-1}(T) \mathbf{D}(T) \hat{\mathbf{x}}_k .$$

$$V^*(t_k) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}_k^T \left( \tilde{\mathbf{Q}}(T) + \mathbf{\Phi}^T(T) \mathbf{S} \mathbf{\Phi}(T) - \mathbf{D}^T(T) \mathbf{E}^{-T}(T) \mathbf{D}(T) \right) \hat{\mathbf{x}}_k .$$

$$V^*(t_k) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_k$$

(  $\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{Q}}(T) + \mathbf{\Phi}^T(T) \mathbf{S} \mathbf{\Phi}(T) - \mathbf{D}^T(T) \mathbf{E}^{-T}(T) \mathbf{D}(T)$  je Riccatiho rovnice výše )

## ***Realizace regulátoru***

Řešení Riccatiho rovnice – konstantní, offline

Nejjednodušší metoda – iterace dokud neplatí  $\|\mathbf{S}_{i+1} - \mathbf{S}_i\| < \varepsilon$

Předpoklad  $t_{i+1} - t_i < h_{\max}$ ,  $h_{\max} > 0$

Matice  $\Phi(h), \Psi(h), \Gamma(h), \tilde{\mathbf{Q}}(h), \tilde{\mathbf{M}}(h), \tilde{\mathbf{R}}(h)$  je možné určit pro  $h$  od 0 do  $h_{\max}$  s daným krokem  $\Delta h$  a uložit v paměti

V on-line režimu se zvolí pouze hodnota odpovídající nejbližšímu  $h_i$

Určení matice přechodu:

$$\frac{d}{dh} \Phi(h) = \mathbf{F} \Phi(h), \quad \Phi(0) = \mathbf{I}_n$$

Ostatní matice – lze určit analogicky

Soustava diferenciálních rovnic

$$\frac{d}{dh} \begin{bmatrix} \Phi(h) \\ \Psi(h) \\ \Gamma(h) \\ \tilde{Q}(h) \\ \tilde{M}(h) \\ \tilde{R}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \Phi(h) \\ \Phi(h) \mathbf{G} \\ \Phi(h) \mathbf{L} \mathbf{W} \mathbf{L}^T \Phi^T(h) \\ \Phi^T(h) \mathbf{Q} \Phi(h) \\ \Phi(h) \mathbf{Q} \Psi(h) \\ \Psi^T(h) \mathbf{Q} \Psi(h) + \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Psi(0) \\ \Gamma(0) \\ \tilde{Q}(0) \\ \tilde{M}(0) \\ \tilde{R}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Matice regulátoru – je možné  $\mathbf{C}(h)$  rovněž vypočítat předem a uložit do paměti



# Řešený příklad

Systém

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = [1 \quad 0], \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$$

- nestabilní a oscilující

S počátečními podmínkami

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_0 = \mathbf{I}_2.$$

Kovariance poruch

$$\mathbf{W} = \mathbf{I}_2, \mathbf{N} = [1],$$

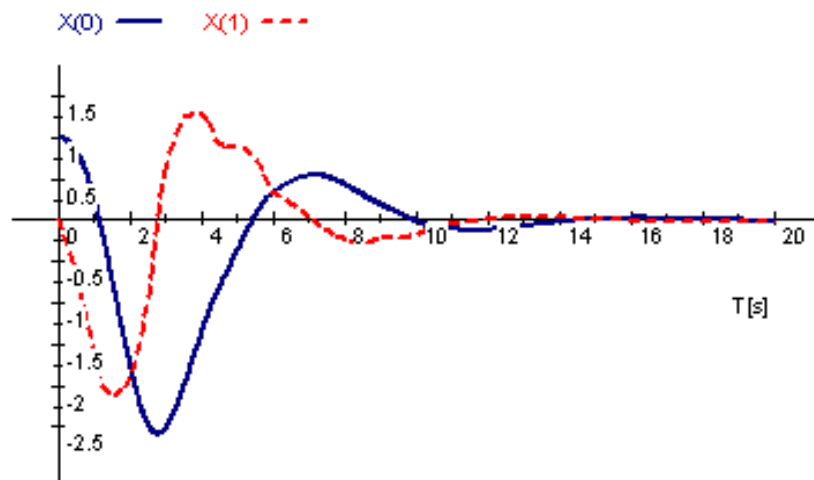
(pro simulaci byly nulové)

Parametry kritéria

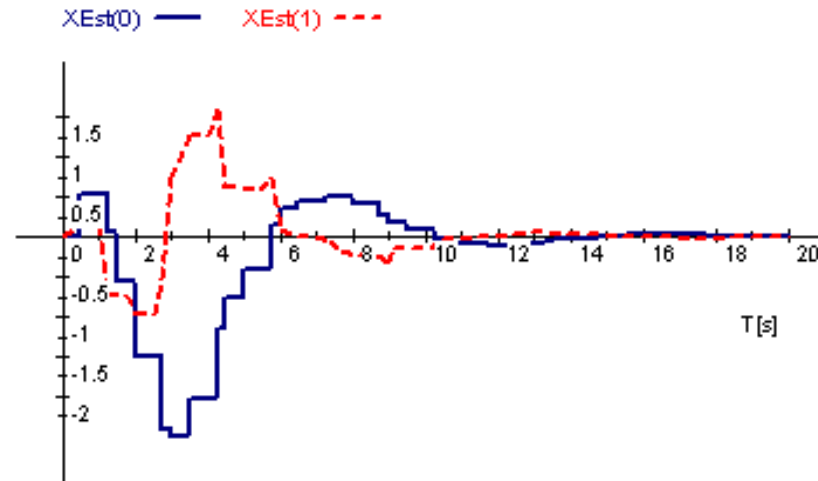
$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2, \mathbf{R} = \mathbf{I}_2.$$

Vzorkovací perioda  $T = 0.5 s$ , každý třetí vzorek zpožděn o 50% periody

# 1. Klasický diskrétní LQG regulátor

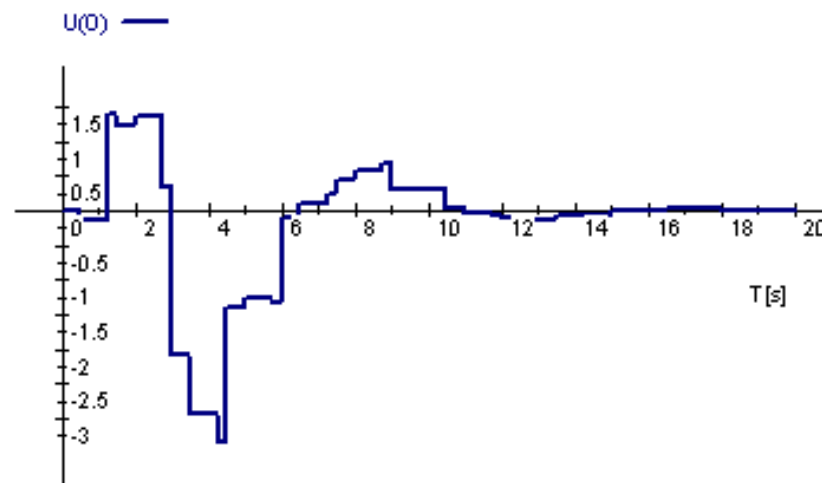


Historie stavu

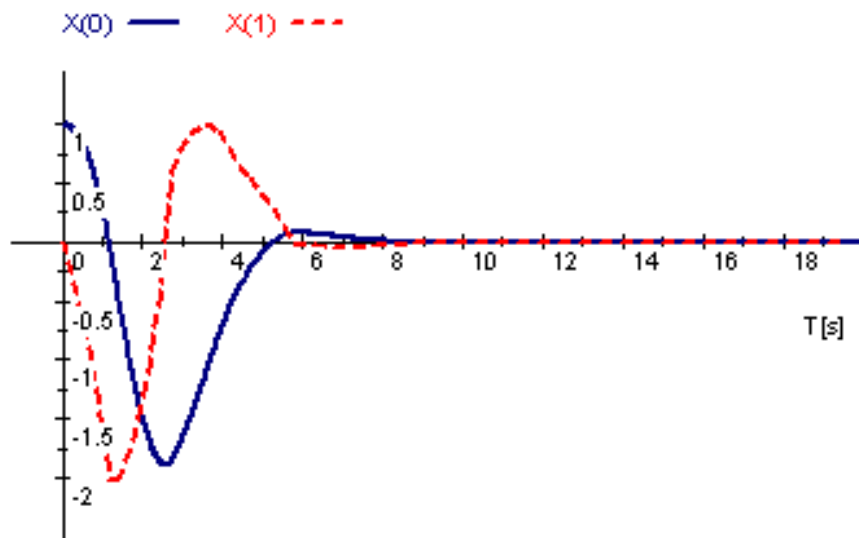


odhad stavu

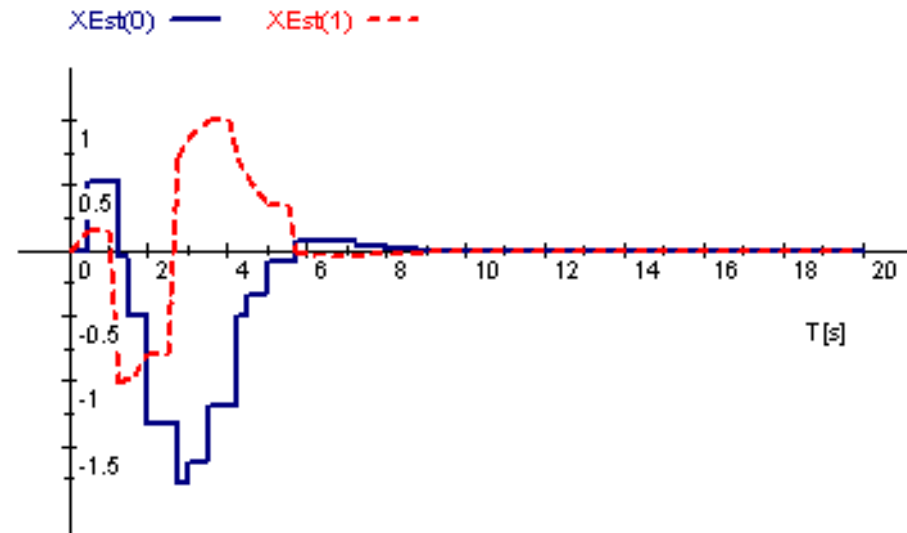
Historie řízení :



## 2. Hybridní LQG regulátor



Historie stavu



odhad stavu

Historie řízení:

