Optimální LQ(G) řízení

Přehled známých i méně známých skutečností

J. Böhm

16. května 2006

Contens

Stavová formulace

- Model

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

- Kritérium

$$\int_0^\infty (x'Qx + u'Ru)\, dx$$

- Řešení: Pokud je $Q \geq 0$ a $R > 0$ a dvojice (A, B) je stabilizovatelná a dvojice (A, C) detekovatelná , pak optimální regulátor existuje, má formu

$$u(t) = -R^{-1}B'Px(t)$$

kde

$$PA + A'P - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

je Ricatiho rovnice.

Stavová formulace

- Model

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

- Kritérium

$$\int_0^\infty (x'Qx + u'Ru)\, dx$$

- Řešení: Pokud je $Q \geq 0$ a $R > 0$ a dvojice (A, B) je stabilizovatelná a dvojice (A, C) detekovatelná , pak optimální regulátor existuje, má formu

$$u(t) = -R^{-1}B'Px(t)$$

kde

$$PA + A'P - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

je Ricatiho rovnice.

Stavová formulace

- Model

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

- Kritérium

$$\int_0^\infty (x'Qx + u'Ru)\, dx$$

- Řešení: Pokud je $Q \geq 0$ a $R > 0$ a dvojice (A, B) je stabilizovatelná a dvojice (A, C) detekovatelná , pak optimální regulátor existuje, má formu

$$u(t) = -R^{-1}B'Px(t)$$

kde

$$PA + A'P - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

je Ricatiho rovnice.

- Hamiltonián

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -Q & -A' \end{bmatrix}$$

- Polynomiální rovnice

$$Q_y \bar{B} B + Q_u \bar{A} A = \phi_0^2 \bar{\phi} \phi$$

$$AR + BS = \phi$$

- Hamiltonián

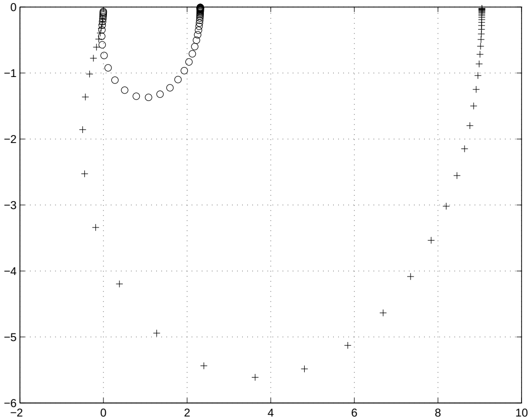
$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -Q & -A' \end{bmatrix}$$

- Polynomiální rovnice

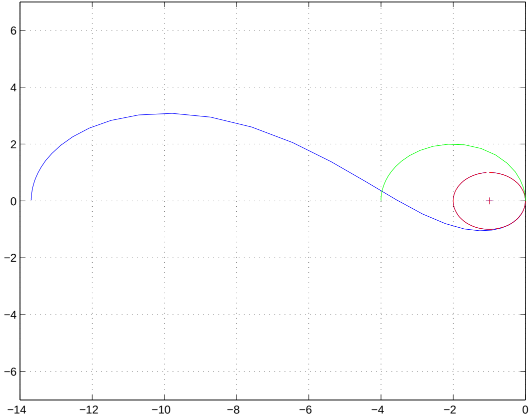
$$Q_y \bar{B} B + Q_u \bar{A} A = \phi_0^2 \bar{\phi} \phi$$

$$AR + BS = \phi$$

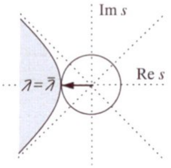
Otevená smyčka



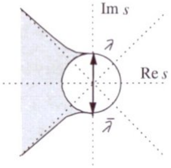
Otevená smyčka



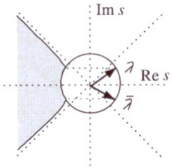
Souvislost s umístěním pólů



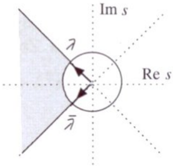
Obr. 1.



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Stavová formulace

- model

$$
\begin{aligned}
x(k) &= Fx(k-1) + Gu(k-1) \\
y(k) &= Cx(k) + Du(k)
\end{aligned}
$$

- kritérium

$$J = \sum_{k=1}^{T} x(k)^T Q_x\, x(k) + u(k)^T Q_u\, u(k) \tag{1}$$

- řešení

$$S_i = F^T S_{i-1} F - F^T S_{i-1} G (Q_u + G^T S_{i-1} G)^{-1} G^T S_{i-1} F + Q_x \tag{2}$$

Stavová formulace

- model

$$
\begin{aligned}
x(k) &= Fx(k-1) + Gu(k-1) \\
y(k) &= Cx(k) + Du(k)
\end{aligned}
$$

- kritérium

$$
J = \sum_{k=1}^{T} x(k)^T Q_x \, x(k) + u(k)^T Q_u \, u(k) \tag{1}
$$

- řešení

$$
S_i = F^T S_{i-1} F - F^T S_{i-1} G (Q_u + G^T S_{i-1} G)^{-1} G^T S_{i-1} F + Q_x \tag{2}
$$

Stavová formulace

- model

$$\begin{aligned} x(k) &= Fx(k-1) + Gu(k-1) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

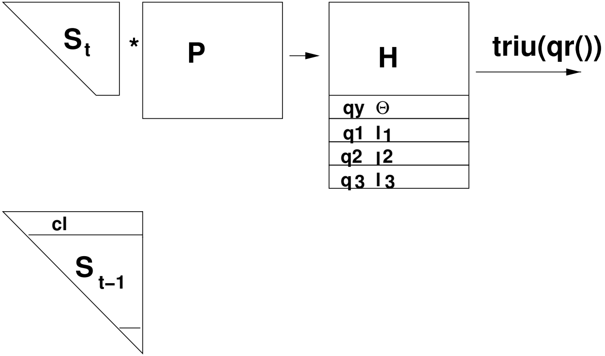
- kritérium

$$J = \sum_{k=1}^{T} x(k)^T Q_x \; x(k) + u(k)^T Q_u \; u(k) \tag{1}$$

- řešení

$$S_i = F^T S_{i-1} F - F^T S_{i-1} G (Q_u + G^T S_{i-1} G)^{-1} G^T S_{i-1} F + Q_x \tag{2}$$

Iterace- odmocninová verze



Stavová formulace

- hamiltonian

$$H = \begin{bmatrix} F + GR^{-1}G'F{-}1'Q & -GR^{-1}G'F{-}1' \\ -F{-}1'Q & F{-}1' \end{bmatrix} =$$

Vstupně výstupní formulace

- model

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{n} b_i u(k-i) + e_k + \sum_{i=1}^{n} d_i v(k-i) + K \quad (3)$$

- kritérium

$$J = \sum_{i=k+1}^{k+T} [q_y(w(i) - y(i))^2 + q_u(u(i) - u0(i))^2] \quad (4)$$

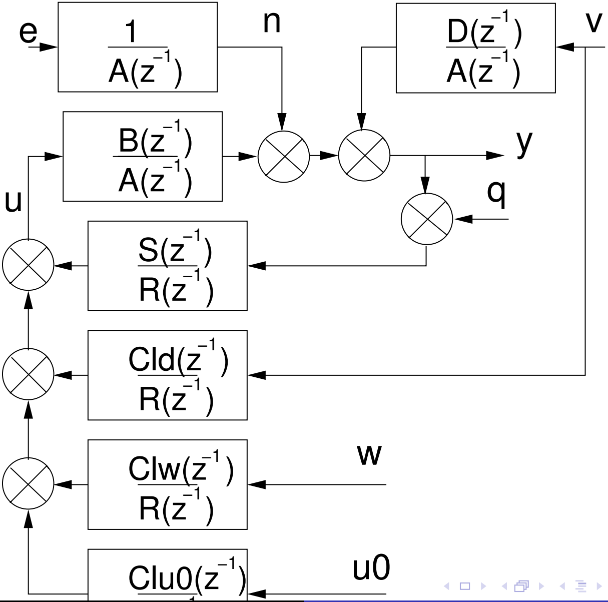
Vstupně výstupní formulace

- model

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{n} b_i u(k-i) + e_k + \sum_{i=1}^{n} d_i v(k-i) + K \tag{3}$$

- kritérium

$$J = \sum_{i=k+1}^{k+T} [q_y (w(i) - y(i))^2 + q_u (u(i) - u0(i))^2] \tag{4}$$


e
1
A(z⁻¹)
n
D(z⁻¹)
A(z⁻¹)
v
B(z⁻¹)
A(z⁻¹)
y
q
u
S(z⁻¹)
R(z⁻¹)
Cld(z⁻¹)
R(z⁻¹)
Clw(z⁻¹)
R(z⁻¹)
w
Clu0(z⁻¹)
u0

Stabilita

- FARE (Fake Algebraic Riccati Equation)

$$S_N = F'S_N F - F'S_N G(G'S_N G + Qu)^{-1} G'S_N F + \bar{Q}x$$

kde $\bar{Q}x = Qx - (S_{N+1} - S_N)$

- Věta o monotonii: Má-li Riccatiho rovnice nezáporné řešení v iteraci i, $i+1$ S_i, S_{i+1}, a platí-li

$$S_i > S_{i+1},$$

pak nerovnost platí pro
$S_{k+i} > S_{k+i+1}$, pro všechna $k > 0$.

Stabilita

- FARE (Fake Algebraic Riccati Equation)

$$S_N = F'S_N F - F'S_N G(G'S_N G + Qu)^{-1} G'S_N F + \bar{Q}x$$

kde $\bar{Q}x = Qx - (S_{N+1} - S_N)$

- Věta o monotonii: Má-li Riccatiho rovnice nezáporné řešení v iteraci $i, \ i+1 \ S_i, \quad S_{i+1}$, a platí-li

$$S_i > S_{i+1},$$

pak nerovnost platí pro
$S_{k+i} > S_{k+i+1}, \quad$ pro všechna $k > 0$.

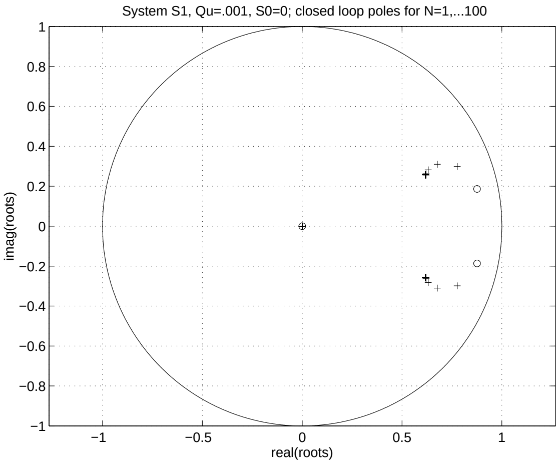
Stabilita

- Věta o stabilitě: Uvažujme diferenční Ricatiho rovnici (**??**).
  Jestliže,
  $[F, G]$ je stabilizovatelné;
  $[F, Qx^{1/2}]$ je detekovatelné;
  $S_{i+1} \leq S_i$, pro některé i,
  pak uzavřená smyčka definovaná
  $(F - G(Qu + G'S_kG)^{-1}G'S_kF)$ je stabilní pro všechna $k \geq i$.
- $S_{i+2} - 2S_{i+1} + S_i \leq 0$, pro některé i,

Stabilita

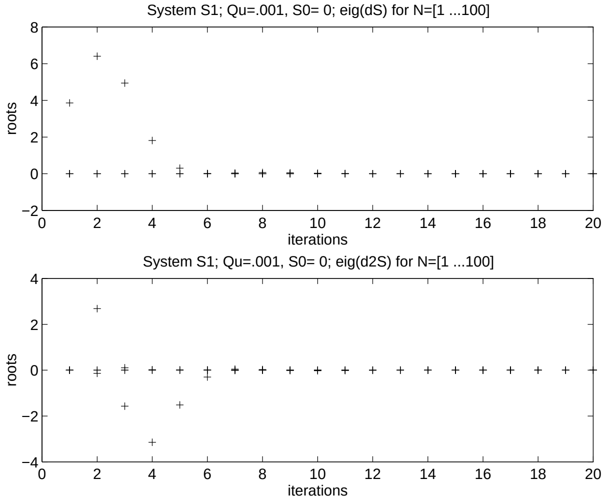
- Věta o stabilitě: Uvažujme diferenční Ricatiho rovnici (**??**).
  Jestliže,
  $[F, G]$ je stabilizovatelné;
  $[F, Qx^{1/2}]$ je detekovatelné;
  $S_{i+1} \leq S_i$, pro některé i,
  pak uzavřená smyčka definovaná
  $(F - G(Qu + G'S_k G)^{-1} G'S_k F)$ je stabilní pro všechna $k \geq i$.
- $S_{i+2} - 2S_{i+1} + S_i \leq 0$, pro některé i,

Příklady konvergence



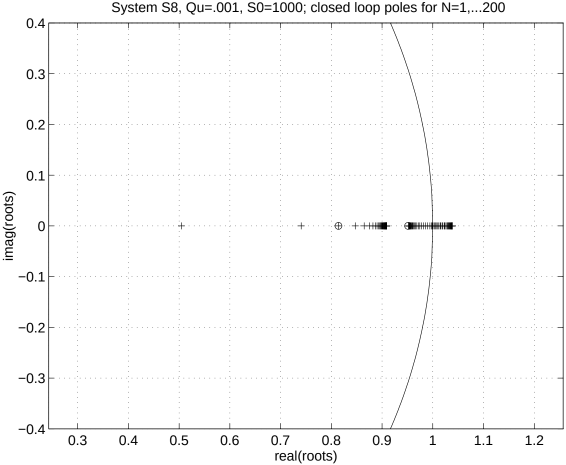
Closed loop pole placement

Příklady konvergence



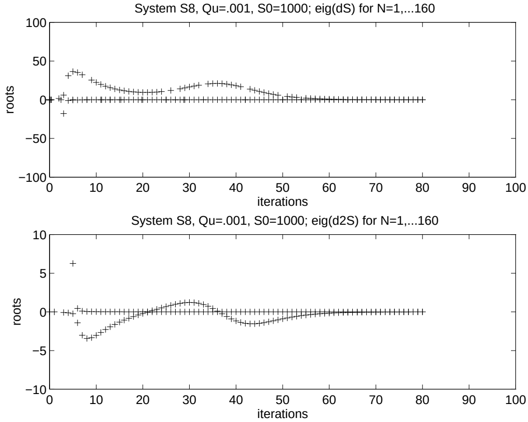
The first and second differences of the Riccati matrix

Příklady konvergence



Closed loop pole placement

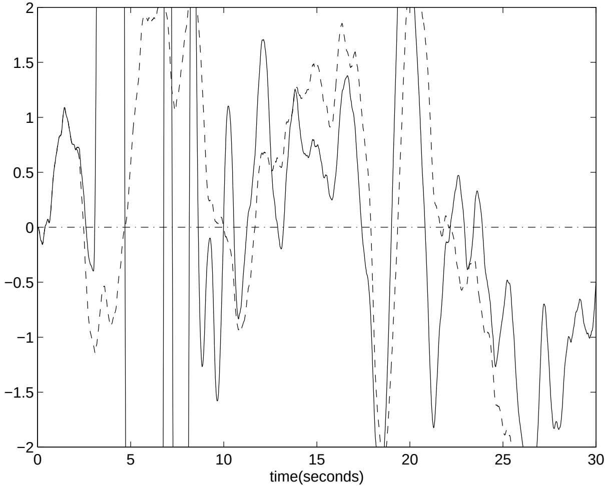
Příklady konvergence



The first and second differences of the Riccati matrix

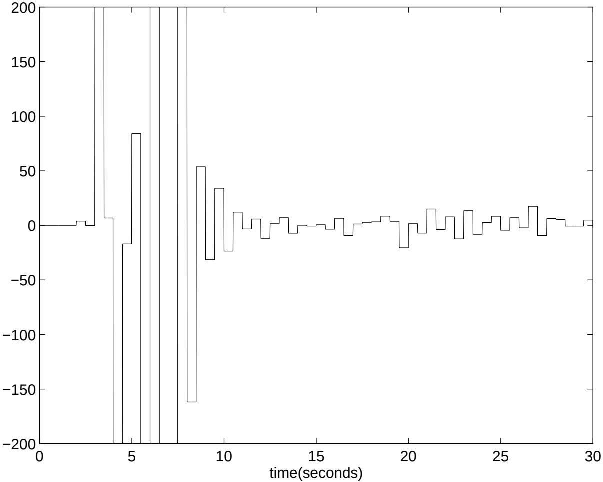
kompenzace šumu závislost na periodě vzorkování

Kompenzace šumu



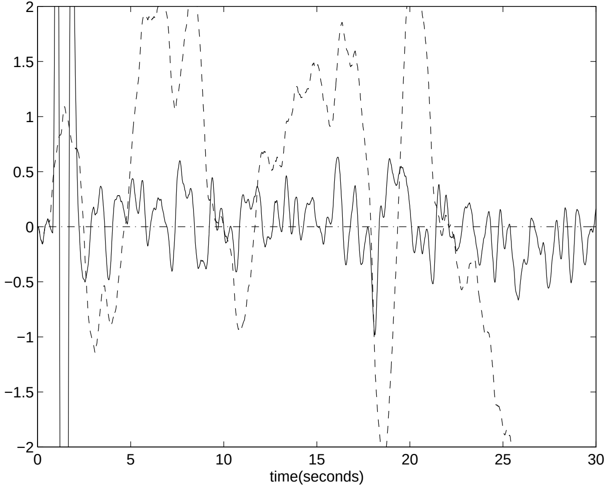
Output (solid line) and disturbance (dotted line)

Kompenzace šumu



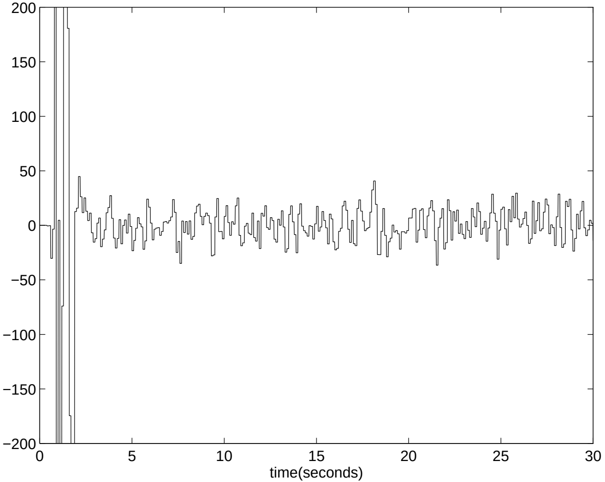
Input

Kompenzace šumu



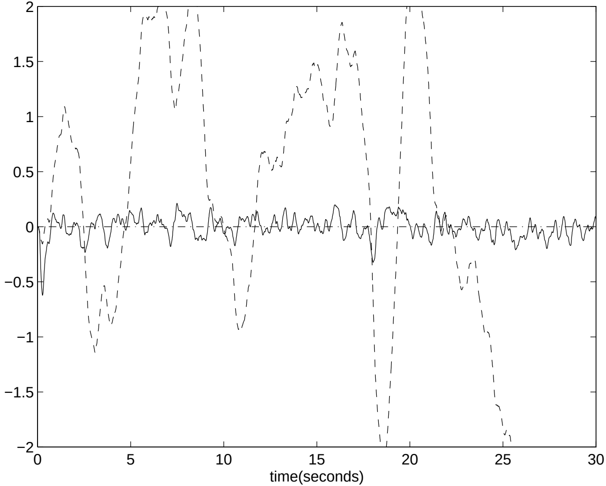
Output (solid line) and disturbance (dotted line)

Kompenzace šumu



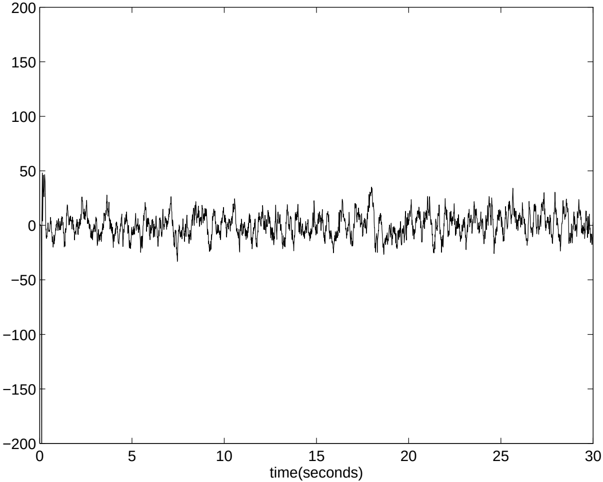
Input

Kompenzace šumu



Output (solid line) and disturbance (dotted line)

Kompenzace šumu



Input

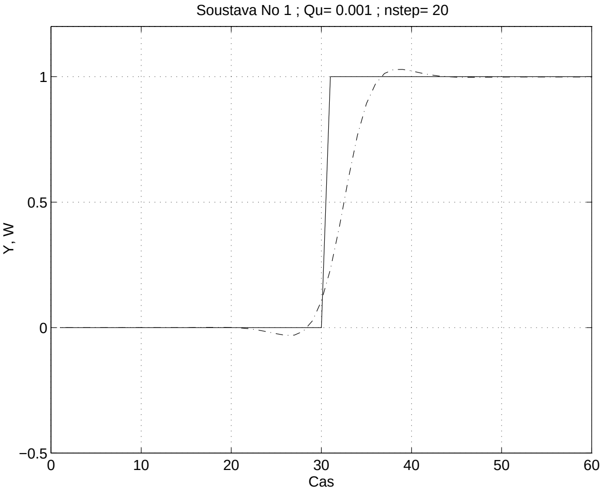
Předprogramování

$$\frac{u}{w} = \frac{F(z)}{R(z^{-1})} \tag{5}$$

kde $F(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots + f_{nw} z^{nw}$

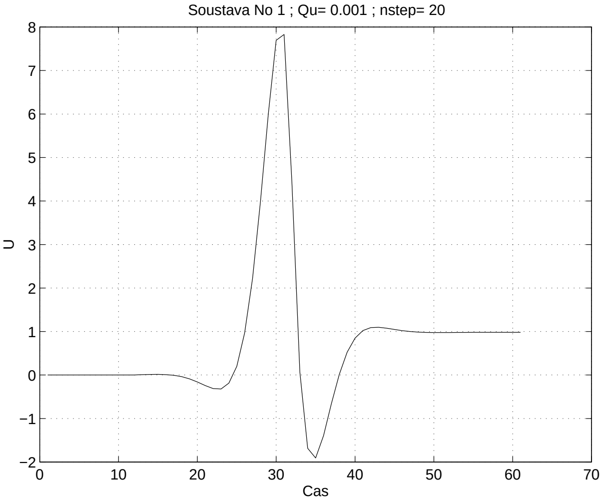
$$\frac{u}{w} = \frac{\sum_{i=1}^{nw} f_i}{R(z^{-1})}.$$

Předprogramování

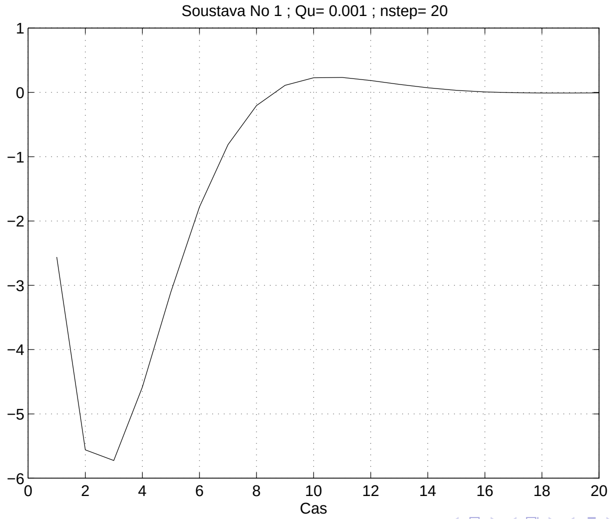


Obrázek: S1 output, 20 steps ahead strategy

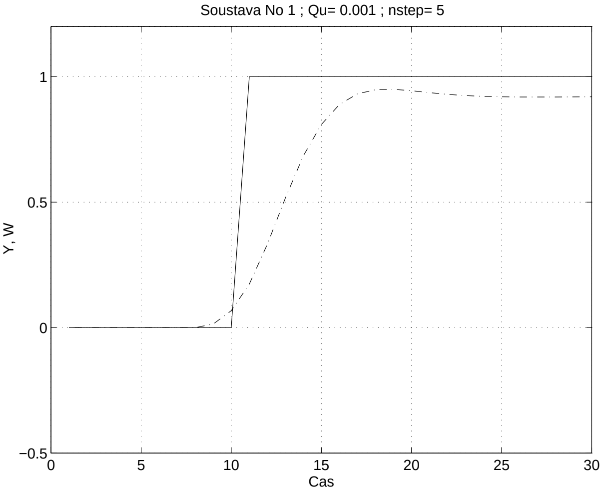
Předprogramování



Předprogramování



Předprogramování

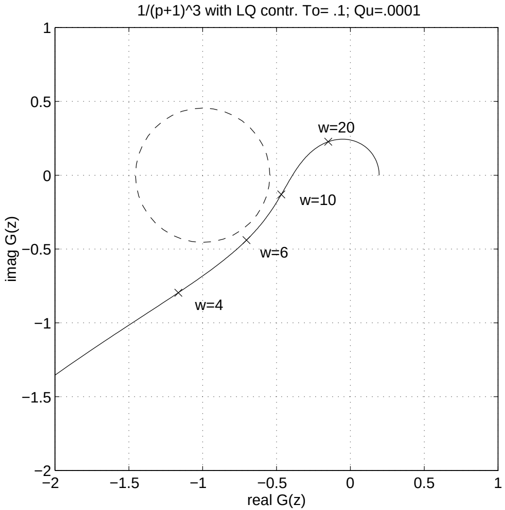


Obrázek: S1: output, 5 steps ahead strategy

Robustnost

$$\frac{Q_u}{G^T S G + Q_u} < |I - L(z^{-1} I - F^T)^{-1} G|^2$$

Robustnost

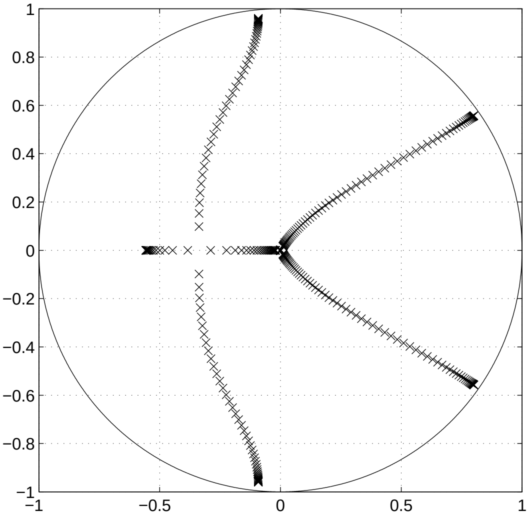

1/(p+1)^3 with LQ contr. To= .1; Qu=.0001
w=20
w=10
w=6
w=4
imag G(z)
real G(z)
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1

Robustnost vstupně výstupní formulace

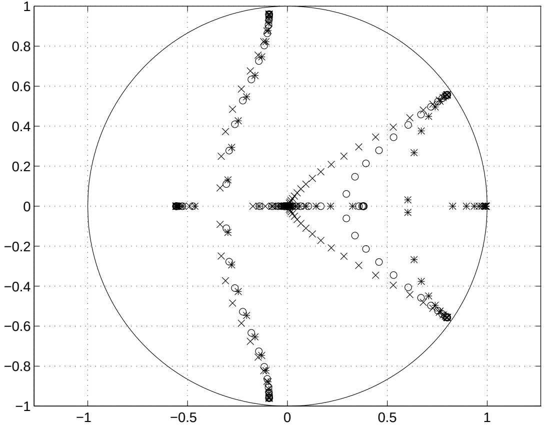
$$\frac{Q_u}{\phi_0^2 \bar{R} R} + Q_y \frac{\bar{B} B}{\phi_0^2 \bar{A} A \bar{R} R} = |1 + G|^2$$

$$\phi_0^2 = Q_u + P_u^T S P_u$$

Obecnější kritérium



Obecnější kritérium



Obrázek: The closed loop roots for $0 < Q_u/Q_y < \infty$ and $Q_{dy} = 0; 1; 10$

Obecnější kritérium

- $$\alpha_i f_i^T f_i$$

- $$Qi = z(k)^T f_i^T \alpha f_i z(k)$$

- $$J = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}^T(k) Q1 \tilde{z}(k) + \tilde{z}^T(k) Q2 \tilde{z}(k) + \ldots \tilde{z}^T(k) Qn \tilde{z}(k)$$

Obecnější kritérium

- $$\alpha_i {f_i}^T f_i$$
- $$Qi = z(k)^T {f_i}^T \alpha f_i z(k)$$
- $$J = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}^T(k) Q1 \tilde{z}(k) + \tilde{z}^T(k) Q2 \tilde{z}(k) + \ldots \tilde{z}^T(k) Qn \tilde{z}(k)$$

Obecnější kritérium

- $$\alpha_i {f_i}^T f_i$$
- $$Qi = z(k)^T {f_i}^T \alpha f_i z(k)$$
- $$J = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}^T(k) Q1 \tilde{z}(k) + \tilde{z}^T(k) Q2 \tilde{z}(k) + \ldots \tilde{z}^T(k) Qn \tilde{z}(k)$$

Spolupráce s jiným regulátorem

- $$Q_A = \alpha \begin{bmatrix} 1 & L_A \\ L_A^T & L_A^T L_A \end{bmatrix}$$
- $$J = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}(t) \alpha Q_A \tilde{z}(t)$$

$$u^*(t) = L_A x(t-1)$$

- $$J = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}(t)(Q + \alpha Q_A)\tilde{z}(t)$$

Spolupráce s jiným regulátorem

- $$Q_A = \alpha \begin{bmatrix} 1 & L_A \\ L_A^T & L_A^T L_A \end{bmatrix}$$
- $$J = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}(t)\alpha Q_A \tilde{z}(t)$$

$u^*(t) = L_A x(t-1)$

- $$J = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}(t)(Q + \alpha Q_A)\tilde{z}(t)$$

Spolupráce s jiným regulátorem

- $$Q_A = \alpha \begin{bmatrix} 1 & L_A \\ L_A^T & L_A^T L_A \end{bmatrix}$$

- $$J = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}(t) \alpha Q_A \tilde{z}(t)$$

$$u^*(t) = L_A x(t-1)$$

- $$J = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}(t)(Q + \alpha Q_A)\tilde{z}(t)$$

Spolupráce s jiným regulátorem