

Odhad stavu matematického modelu křížovatek

Miroslav Šimandl, Miroslav Flídr a Jindřich Duník

Katedra kybernetiky & Výzkumné centrum Data-Algoritmy-Rozhodování
Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

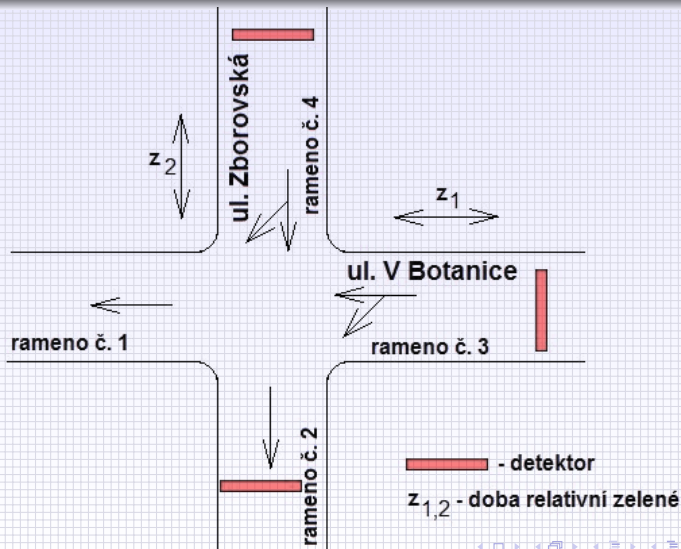
1. listopadu 2005



- 1 Matematický model křižovatek
- 2 Odhad stavu lineárních Gaussovských systémů
 - Obecné řešení problému estimace
 - Kalmanův filtr
- 3 Odhad stavu nelineárních Gaussovských systémů
 - Lokální metody odhadu stavu
 - Hlavní směry v návrhu lokálních metod
 - Ilustrační příklad
 - Globální metody odhadu stavu
- 4 Metody odhadu stavu v dopravních úlohách
 - Současný stav problému
 - Cíle do budoucna



Křižovatka ulic V Botanice - Zborovská



Základní stavový model křižovatek

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{F}_k + \mathbf{w}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k + \mathbf{v}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Konkrétní matice pro křižovatku ulic Zborovská - V Botanice

$$\mathbf{x}_k = [\xi_{3,k}, O_{3,k}, \xi_{4,k}, O_{4,k}]^T, \quad \mathbf{z}_k = [z_{1,k}, z_{2,k}]^T, \quad \mathbf{y}_k = [y_{2,k}, O_{3,k}, O_{4,k}]^T$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \delta_{3,k} & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{3,k} & \beta_{3,k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{4,k} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{4,k} & \beta_{4,k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} l_{3,k} \\ \lambda_{3,k} \\ l_{4,k} \\ \lambda_{4,k} \end{bmatrix}, \dots$$

- délka kolony, resp. obsazenost, v i -tém rameni: $\xi_{i,k}$, resp. $O_{i,k}$,
- vstupní, resp. výstupní, intenzita v i -tém rameni: $l_{i,k}$, resp. $y_{i,k}$,
- stavový šum $\mathbf{w}_k$, resp. šum v rovnici měření $\mathbf{v}_k$,
- **neznámé parametry**,...



Řešení úlohy filtrace

Pro úplné řešení problému filtrace je nutné nalézt hustotu pravděpodobnosti stavu $\mathbf{x}_k$ podmíněnou měřením $\mathbf{y}^k = [\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k]$.

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = ?$$

Bayesovy rekurzivní vztahy

Obecné řešení problému filtrace poskytují tzv. Bayesovy rekurzivní vztahy (BRV) pro filtraci

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^k) = \frac{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}^{k-1})}$$

a pro jednokrokovou predikci

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}^{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}.$$



Exaktní řešení Bayesových rekurzivních vztahů

Exaktní řešení BRV pro výpočet podmíněných hustot pravděpodobnosti je možné jen v několika případech, např. pro lineární Gaussovský systém.

Řešení rekurzivních vztahů pak vede na lineární estimační algoritmy, např. na **Kalmanův filtr** (KF).

Kalmanův filtr

- Pro lineární Gaussové systémy pak KF představuje optimální estimátor ve smyslu minimálních nejmenších čtverců.
- Pro návrh KF je zapotřebí úplný popis systému, tj. známé matice ve stavové rovnici a rovnici měření, stavový šum, šum v rovnici měření a počáteční podmínka popsána normálním rozložením se známou střední hodnotou a kovarianční maticí.



Exaktní řešení Bayesových rekurzivních vztahů

Exaktní řešení BRV pro výpočet podmíněných hustot pravděpodobnosti je možné jen v několika případech, např. pro lineární Gaussovský systém.

Řešení rekurzivních vztahů pak vede na lineární estimační algoritmy, např. na **Kalmanův filtr** (KF).

Kalmanův filtr

- Pro lineární Gaussové systémy pak KF představuje optimální estimátor ve smyslu minimálních nejmenších čtverců.
- Pro návrh KF je zapotřebí úplný popis systému, tj. známé matice ve stavové rovnici a rovnici měření, stavový šum, šum v rovnici měření a počáteční podmínka popsána normálním rozložením se známou střední hodnotou a kovarianční maticí.



Kalmanův filtr a off-line identifikace systému

- Pro návrh KF je nutné neznámé parametry v popisu systému odhadnout off-line.
- Pro dopravní úlohu byly neznámé parametry odhadnuty jednorázovou metodou nejmenších čtverců a následně byl použit KF.
- Nevýhody jednorázové off-line identifikace:
 - při změně struktury modelu je nutné znovu stanovit rovnice pro výpočet odhadu parametrů,
 - pro různé soubory dat se mohou získané odhady parametrů významně lišit,
 - nebere v úvahu časově proměnné parametry.



Odhad stavu a parametrů

- Nevýhody spojené s jednorázovou off-line identifikací systému a aplikací KF lze odstranit paralelním odhadováním stavu systému a neznámých parametrů.
- Jedním ze způsobů, jak odhadovat stav i parametry současně, je rozšířit vektor stavu o neznámé parametry.
Př.: $\hat{\mathbf{x}}_k = [\mathbf{x}_k^T, \kappa_{3,k}, \beta_{3,k}, \lambda_{3,k}, \dots]^T$
- Rozšíření stavu o vektor neznámých parametrů vede na nelineární model systému a tedy na metody nelineárního dohadu.
- Pro většinu nelineárních systémů nelze nalézt exaktní řešení BRV. Je proto nutné použít vhodnou aproximaci:
 - lokální metody odhadu,
 - globální metody odhadu.



Odhad stavu a parametrů

- Nevýhody spojené s jednorázovou off-line identifikací systému a aplikací KF lze odstranit paralelním odhadováním stavu systému a neznámých parametrů.
- Jedním ze způsobů, jak odhadovat stav i parametry současně, je rozšířit vektor stavu o neznámé parametry.
Př.: $\hat{\mathbf{x}}_k = [\mathbf{x}_k^T, \kappa_{3,k}, \beta_{3,k}, \lambda_{3,k}, \dots]^T$
- Rozšíření stavu o vektor neznámých parametrů vede na nelineární model systému a tedy na metody nelineárního dohadu.
- Pro většinu nelineárních systémů nelze nalézt exaktní řešení BRV. Je proto nutné použít vhodnou aproximaci:
 - lokální metody odhadu,
 - globální metody odhadu.



Odhad stavu a parametrů

- Nevýhody spojené s jednorázovou off-line identifikací systému a aplikací KF lze odstranit paralelním odhadováním stavu systému a neznámých parametrů.
- Jedním ze způsobů, jak odhadovat stav i parametry současně, je rozšířit vektor stavu o neznámé parametry.
Př.: $\hat{\mathbf{x}}_k = [\mathbf{x}_k^T, \kappa_{3,k}, \beta_{3,k}, \lambda_{3,k}, \dots]^T$
- Rozšíření stavu o vektor neznámých parametrů vede na nelineární model systému a tedy na metody nelineárního dohadu.
- Pro většinu nelineárních systémů nelze nalézt exaktní řešení BRV. Je proto nutné použít vhodnou aproximaci:
 - lokální metody odhadu,
 - globální metody odhadu.



Odhad stavu a parametrů

- Nevýhody spojené s jednorázovou off-line identifikací systému a aplikací KF lze odstranit paralelním odhadováním stavu systému a neznámých parametrů.
- Jedním ze způsobů, jak odhadovat stav i parametry současně, je rozšířit vektor stavu o neznámé parametry.
Př.: $\hat{\mathbf{x}}_k = [\mathbf{x}_k^T, \kappa_{3,k}, \beta_{3,k}, \lambda_{3,k}, \dots]^T$
- Rozšíření stavu o vektor neznámých parametrů vede na nelineární model systému a tedy na metody nelineárního dohadu.
- Pro většinu nelineárních systémů nelze nalézt exaktní řešení BRV. Je proto nutné použít vhodnou aproximaci:
 - lokální metody odhadu,
 - globální metody odhadu.



Vlastnosti lokálních metod

Lokální metody jsou založeny na myšlence využití techniky Kalmanova filtru i v oblasti nelineárních systémů. Aby bylo možné tuto myšlenku použít, je nutné popis nelineárního systému vhodným způsobem aproximovat.

Výhody a nevýhody

- Za výhodu lze považovat analytické řešení rekurzivních vztahů.
- Naopak hlavní nevýhodu lze spatřovat v lokální platnosti získaných odhadů.

Transformace náhodné veličiny

- Nechť je známa $\bar{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}]$ a $\mathbf{P}_x = \text{cov}[\mathbf{x}]$ náhodné veličiny $\mathbf{x}$ a nechť je dána nelineární funkce $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$.
- Cílem je nalézt
 - $\bar{\mathbf{y}} = E[\mathbf{y}]$,
 - $\mathbf{P}_y = E[(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})]$,
 - $\mathbf{P}_{xy} = E[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})]$.



Vlastnosti lokálních metod

Lokální metody jsou založeny na myšlence využití techniky Kalmanova filtru i v oblasti nelineárních systémů. Aby bylo možné tuto myšlenku použít, je nutné popis nelineárního systému vhodným způsobem aproximovat.

Výhody a nevýhody

- Za výhodu lze považovat analytické řešení rekurzivních vztahů.
- Naopak hlavní nevýhodu lze spatřovat v lokální platnosti získaných odhadů.

Transformace náhodné veličiny

- Nechť je známa $\bar{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}]$ a $\mathbf{P}_x = \text{cov}[\mathbf{x}]$ náhodné veličiny $\mathbf{x}$ a nechť je dána nelineární funkce $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$.
- Cílem je nalézt
 - $\bar{\mathbf{y}} = E[\mathbf{y}]$,
 - $\mathbf{P}_y = E[(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})]$,
 - $\mathbf{P}_{xy} = E[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})]$.



Vlastnosti lokálních metod

Lokální metody jsou založeny na myšlence využití techniky Kalmanova filtru i v oblasti nelineárních systémů. Aby bylo možné tuto myšlenku použít, je nutné popis nelineárního systému vhodným způsobem aproximovat.

Výhody a nevýhody

- Za výhodu lze považovat analytické řešení rekurzivních vztahů.
- Naopak hlavní nevýhodu lze spatřovat v lokální platnosti získaných odhadů.

Transformace náhodné veličiny

- Nechť je známa $\bar{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}]$ a $\mathbf{P}_x = \text{cov}[\mathbf{x}]$ náhodné veličiny $\mathbf{x}$ a nechť je dána nelineární funkce $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$.
- Cílem je nalézt
 - $\bar{\mathbf{y}} = E[\mathbf{y}]$,
 - $\mathbf{P}_y = E[(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})]$,
 - $\mathbf{P}_{xy} = E[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})]$.



Taylorův rozvoj prvního řádu (standardní přístup, 1970)

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}),$$

$$\text{kde } \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}) = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}.$$

Charakteristiky náhodné proměnné $\mathbf{y}$

- $\bar{\mathbf{y}}_A = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}})$
- $\mathbf{P}_{y,A} = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{P}_x\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}})^T$
- $\mathbf{P}_{xy,A} = \mathbf{P}_x\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}})^T$

Lokální filtr

Na linearizaci nelineárních funkcí v popisu systému za pomoci Taylorova rozvoje prvního řádu je založen např. **rozšířený Kalmanův filtr**.



Stirlingova polynomiální interpolace prvního řádu (nový přístup, 2000)

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2h} \left(\sum_{i=1}^{n_x} \Delta x_i \eta_i \right) \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}),$$

kde $\eta_i \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_i) - \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_i))$, $\mathbf{s}_i$ je i -tý sloupec $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{P}_x = \mathbf{S}_x \mathbf{S}_x^T$.

Charakteristiky náhodné proměnné $\mathbf{y}$

- $\bar{\mathbf{y}}_A = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}})$
- $\mathbf{P}_{y,A} = \frac{1}{4h^2} \sum_{i=1}^{n_x} (\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_i) - \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_i)) (\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_i) - \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_i))^T$
- $\mathbf{P}_{xy,A} = \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^{n_x} \mathbf{s}_i (\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_i) - \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_i))$

Lokální filtr

Na aproximaci nelineárních funkcí v popisu systému za pomoci Stirlingovy interpolace prvního řádu je založen **diferenční lokální filtr prvního řádu**.

Transformace charakteristických bodů (nový přístup, 2000)

Náhodná veličina $\mathbf{x}$ je aproximována množinou bodů

$$\mathcal{X}_0 = \bar{\mathbf{x}}, \mathcal{W}_0 = \frac{\kappa}{n_x + \kappa}$$

$$\mathcal{X}_i = \bar{\mathbf{x}} + \left(\sqrt{(n_x + \kappa) \mathbf{P}_x} \right)_i, i = 1, 2, \dots, n_x,$$

$$\mathcal{X}_j = \bar{\mathbf{x}} - \left(\sqrt{(n_x + \kappa) \mathbf{P}_x} \right)_{j-n_x}, j = (n_x + 1), (n_x + 2), \dots, 2n_x,$$

$$\text{kde } \mathcal{W}_i = \mathcal{W}_j = \frac{1}{2(n_x + \kappa)}, \forall i, j.$$

Množina bodů pak může být transformována skrze nezměněnou nelineární funkci

$$\mathcal{Y}_i = \mathbf{g}(\mathcal{X}_i), \forall i.$$



Transformace charakteristických bodů

Charakteristiky náhodné proměnné y

- $\bar{y}_A = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i y_i$
- $P_{y,A} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i (y_i - \bar{y}_A)(y_i - \bar{y}_A)^T$
- $P_{xy,A} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}_A)^T$

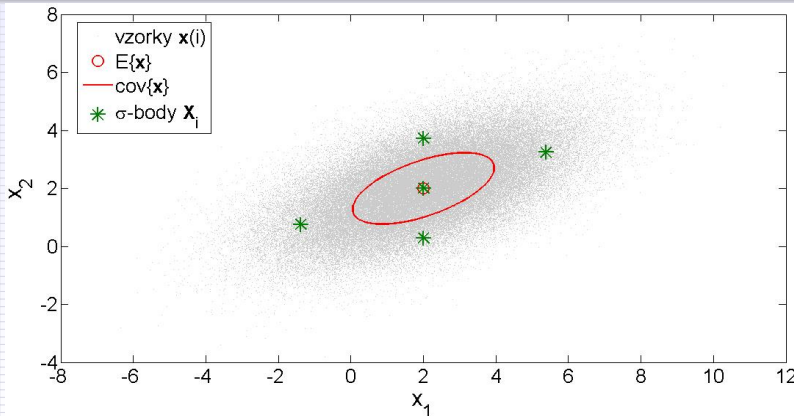
Lokální filtr

Na aproximaci popisu náhodné veličiny množinou charakteristických bodů jsou založeny “**unscentované**” lokální filtry.



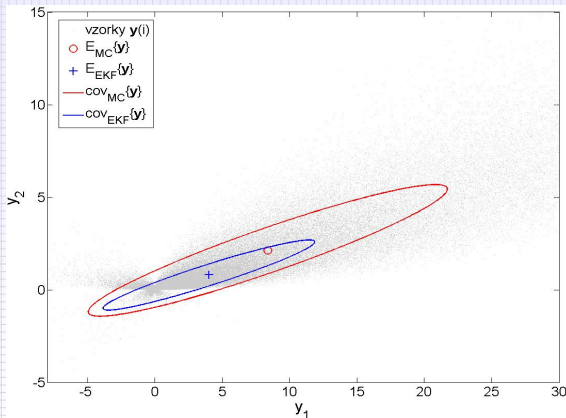
Transformace náhodné proměnné skrze nelineární funkci

Nechť $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}\{\mathbf{x} : \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3.8 & 1.4 \\ 1.4 & 1.5 \end{bmatrix}\}$ a $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.5x_1x_2^2 \\ 0.1x_1^2x_2 \end{bmatrix}$.



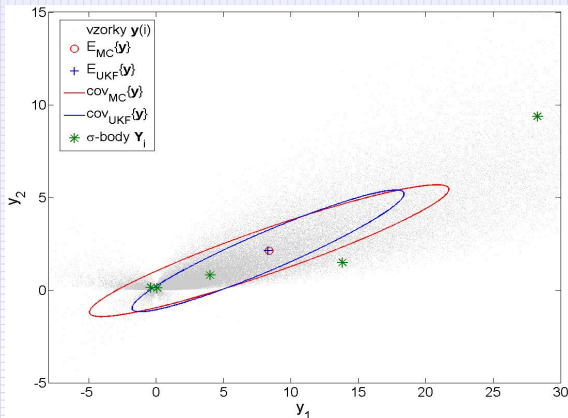
Transformace náhodné proměnné skrze nelineární funkci

- Aproximace nelineární funkce $\mathbf{g}(\cdot)$ za pomoci Taylorova rozvoje 1. řádu.



Transformace náhodné proměnné skrze nelineární funkci

- Aproximace popisu náhodné proměnné y za pomoci transformovaných charakteristických bodů.



Vlastnosti globálních metod

Globální metody jsou založeny především na vhodné aproximaci popisu hustot pravděpodobnosti.

Výhody a nevýhody

- Za výhodu lze považovat globální platnost získaných odhadů.
- Naopak hlavní nevýhodu lze spatřovat ve výrazně vyšších výpočetních nárocích.

Základní metody

- analytické metody
- simulační metody
- numerické metody



Vlastnosti globálních metod

Globální metody jsou založeny především na vhodné aproximaci popisu hustot pravděpodobnosti.

Výhody a nevýhody

- Za výhodu lze považovat globální platnost získaných odhadů.
- Naopak hlavní nevýhodu lze spatřovat ve výrazně vyšších výpočetních nárocích.

Základní metody

- analytické metody
- simulační metody
- numerické metody



Vlastnosti globálních metod

Globální metody jsou založeny především na vhodné aproximaci popisu hustot pravděpodobnosti.

Výhody a nevýhody

- Za výhodu lze považovat globální platnost získaných odhadů.
- Naopak hlavní nevýhodu lze spatřovat ve výrazně vyšších výpočetních nárocích.

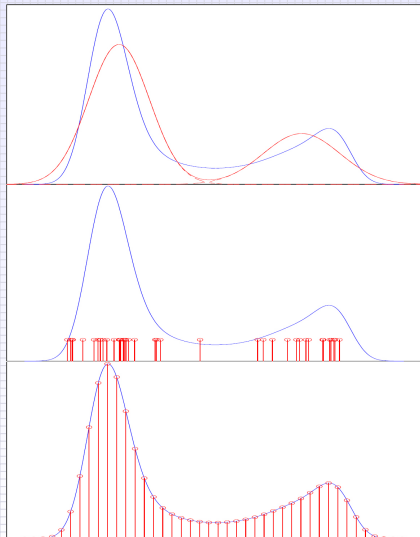
Základní metody

- analytické metody
- simulační metody
- numerické metody



Aproximace hustoty pravděpodobnosti

- součtem normálních
rozložení
metoda Gaussovských směsí
- náhodně vygenerovanými
vzorky
simulační metoda Monte
Carlo
- ortogonální síť bodů
metoda bodových mas



Metody odhadu stavu v dopravních úlohách

- V úlohách odhadu stavu a parametrů křižovatek byly použity následující lokální filtry:
 - unscentovaný Kalmanův filtr (UKF),
 - diferenční lokální filtr 1. řádu (DD1),
 - diferenční lokální filtr 2. řádu (DD2),
 - (rozšířený Kalmanův filtr (EKF)).
- Pro modely používané v dopravních úlohách je kvalita odhadu všech použitých lokálních filtrů srovnatelná.

Algoritmus	MSE (víkend)	MSE (všední den)
UKF	190.0567	316.6879
DD1	190.0887	316.8425
DD2	190.2964	316.7423
KF	187.7603	1098.9543



Nedostatky současného řešení

- Neuspokojivá kvalita odhadu některých kolon při prudkém nárůstu vozidel v křižovatce.
- Problém s numerickou stabilitou unscentovaného Kalmanova filtru.

Cíle do budoucna

- Využití numericky stabilních verzí lokálních filtrů.
- Využití metod globální filtrace v dopravních úlohách (především metodu Gaussovských součtů).
- Zpřesnění matematického modelu křižovatek ve smyslu
 - struktury modelu (nelineární model),
 - vlastností stavového šumu a šumu měření.



Nedostatky současného řešení

- Neuspokojivá kvalita odhadu některých kolon při prudkém nárůstu vozidel v křižovatce.
- Problém s numerickou stabilitou unscentovaného Kalmanova filtru.

Cíle do budoucna

- Využití numericky stabilních verzí lokálních filtrů.
- Využití metod globální filtrace v dopravních úlohách (především metodu Gaussovských součtů).
- Zpřesnění matematického modelu křižovatek ve smyslu
 - struktury modelu (nelineární model),
 - vlastností stavového šumu a šumu měření.



Odhad délky kolon lokálními filtry

